20. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1980/1981

Aufgaben und Lösungen

20. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 200721:

Auf einer internationalen Mathematikerversammlung werden Vorträge in russischer, englischer, deutscher, französischer und ungarischer Sprache gehalten. Ferner wissen wir:

(1) Diejenigen Tagungsteilnehmer, die sowohl die russische als auch die französische Sprache verstehen, verstehen außerdem auch alle Englisch.

(2) Diejenigen Teilnehmer, die Ungarisch verstehen, verstehen auch Französisch und Deutsch.

Untersuche, ob diejenigen Tagungsteilnehmer, die sowohl Ungarisch als auch Russisch verstehen, zum Verstehen einer der Vortragssprachen einen Dolmetscher brauchen!

Aufgabe 200722:

Von einem Dreieck wird gefordert: Die Maßzahlen der in cm gemessenen Seitenlängen a, b, c sollen natürliche Zahlen sein, die Seitenlänge a soll genau 36% des Umfangs u betragen, die Seitenlänge b genau 48% des Umfangs.

a) Untersuche, ob es unter diesen Bedingungen ein Dreieck gibt, dessen Umfang $u = 25$ cm ist! Wenn dies der Fall ist, so gib seine Seitenlängen an!

b) Untersuche, ob es unter den genannten Bedingungen auch ein Dreieck gibt, dessen Umfang $u > 25$ cm ist! Wenn dies der Fall ist, so gib seine Seitenlängen an!

c) Ermittle alle diejenigen Längen u, die kleiner als 100 cm sind und als Umfang eines Dreiecks auftreten können, dessen Seitenlängen die gestellten Forderungen erfüllen! Ermittle zu jedem dieser Werte u jeweils die Seitenlängen eines solchen Dreiecks!

Aufgabe 200723:

Jens sagt: "Ich denke mir zwei natürliche Zahlen. Ihr kleinstes gemeinsames Vielfache (k.g.V.) beträgt 51 975, ihr größter gemeinsamer Teiler (g.g.T.) ist 45. Eine der beiden Zahlen lautet 4 725."

Stelle fest, ob es genau eine natürliche Zahl gibt, die nach diesen Angaben die zweite von Jens gedachte Zahl sein kann! Trifft das zu, so ermittle diese zweite Zahl!

Aufgabe 200724:

a) Beweise den folgenden Satz:

Wenn ein spitzwinkliges Dreieck ABC gleichschenklig mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist, dann haben die von A und B ausgehenden Höhen gleiche Länge.

b) Beweise die folgende Umkehrung dieses Satzes: Wenn in einem spitzwinkligen Dreieck ABC die von A und B ausgehenden Höhen gleiche Länge haben, dann ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit $\overline{AC} = \overline{BC}$.

20. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 200721:

Die genannten Teilnehmer verstehen nach (2), da sie Ungarisch verstehen, auch die französische Sprache. Daher, und weil sie Russisch verstehen, gehören sie zu den in (1) genannten Teilnehmern; sie verstehen also Englisch. Aus (2) folgt ferner, daß sie auch Deutsch verstehen. Also brauchen sie für keine der fünf Sprachen einen Dolmetscher.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200722:

a) 36% von 25 cm sind $\frac{36\cdot 25}{100}$ cm = 9 cm,
48% von 25 cm sind $\frac{48\cdot 25}{100}$ cm = 12 cm.

Ferner gilt 25 cm − 9 cm − 12 cm = 4 cm.

Da nun die Dreiecksungleichungen

$$\begin{aligned} 12\text{ cm} + 4\text{ cm} &> 9\text{ cm},\\ 4\text{ cm} + 9\text{ cm} &> 12\text{ cm},\\ 9\text{ cm} + 12\text{ cm} &> 4\text{ cm} \end{aligned}$$

erfüllt sind, gibt es ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = 9$ cm, $b = 12$ cm, $c = 4$ cm. Dieses erfüllt die gestellten Forderungen. Damit ist der geforderte Nachweis erbracht, und a, b, c sind ermittelt.

b), c) Wenn eine Länge $u = z$ cm als Umfang eines Dreiecks auftritt, das die Forderungen der Aufgabe erfüllt, so folgt: Die Zahl z ist eine natürliche Zahl, ferner iat auch $\frac{36}{100}z = \frac{9}{25}z$ eine natürliche Zahl, nämlich die Maßzahl von a. Also ist $9z$ durch 25 teilbar. Da 9 zu 25 teilerfremd ist, ist mithin z durch 25 teilbar. Somit kann nur für $z = 25n$ mit natürlichem n die Länge $u = z$ cm als Umfang eines Dreiecks auftreten, das die gestellten Forderungen erfüllt.

Wegen der Forderung $z < 100$ kommen dabei nur Werte $n < 4$ in Betracht, d.h. die Längenangaben $u = 25$ cm, $u = 50$ cm, $u = 75$ cm.

Für jede solche Umfangsangabe gilt: 36% von $25n$ sind $9n$; 48% von $25n$ sind $12n$; ferner gilt $25n-9n-12n = 4n$. Wieder sind damit die Dreiecksungleiohungen erfüllt, also gibt es zu diesen Umfangsangaben auch Dreiecke, die die Forderungen der Aufgabe erfüllen.

Indem man für n die Werte 1, 2, 3 einsetzt, erhält man die gesuohten Seitenlangen, nämlich für $n = 1$ die Werte aus dem Aufgabenteil a) und für $n = 2$ zur Umfangsangabe $u = 50$ cm die Seitenlängen $a = 18$ cm, $b = 24$ cm, $c = 8$ cm bzw. für $n = 3$ zur Umfangsangabe $u = 75$ cm die Seitenlängen $a = 27$ cm, $b = 36$ cm, $c = 12$ cm.

Hinweis zur Korrektur: Aufgabenteil b) kann auch für sich gesondert analog zu a) gelöst werden, beginnend z.B. mit der (ohne Herleitung genannten) Angabe $u = 50\,\text{cm}$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200723:

Die Primzerlegungen der genannten Zahlen sind:

k.g.V.: $51\,975 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$,
g.g.T.: $45 = 3^2 \cdot 5$, erste Zahl: $4\,725 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Wenn eine natürliche Zahl z die zweite gedachte Zahl sein kann, so gilt für sie: In ihrer Primzerlegung enthält sie höchstens solche Primzahlen, die im k.g.V. vorkommen, also höchstens die Primzahlen 3, 5, 7, 11.

Die Primzahl 3 kommt in 4 725 in größerer Anzahl vor als im g.g.T., wo sie in der Anzahl 2 auftritt. Daher muß sie in z in dieser Anzahl 2 als Faktor vorkommen.

Die Primzahl 5 kommt in 4 725 in größerer Anzahl vor als im g.g.T., wo sie in der Anzahl 1 auftritt. Daher muß sie in z in dieser Anzahl 1 als Faktor vorkommen.

Die Primzahl 7 kommt in 4 725 vor, aber nicht im g.g.T. Daher kann sie in z nicht auftreten.

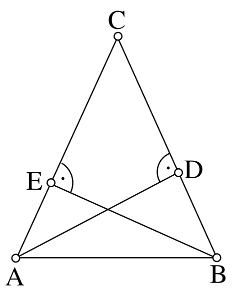
Die Primzahl 11 kommt nicht in 4 725 vor, aber im k.g.V., wo sie in der Anzahl 1 auftritt. Daher muß sie in z in dieser Anzahl 1 als Faktor vorkommen.

Also kann höchstens die Zahl $z = 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 495$ die zweite gedachte Zahl sein. Sie kann dies tatsächlich; denn $4\,725 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ und $z = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ haben das k.g.V. $3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 51\,975$ und den g.g.T. $3^2 \cdot 5 = 45$.

Es gibt folglich genau eine natürliche Zahl, die die zweite gedachte Zahl sein kann: sie lautet 495.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200724:



a) Wenn ein spitzwinkliges Dreieck ABC gleichschenklig mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist, so folgt für die Höhen AD und BE, daß $\overline{\sphericalangle BAE} = \overline{\sphericalangle ABD}$ gilt, da diese Winkel mit den einander gleichgroßen Basiswinkeln $\sphericalangle BAC$ bzw. $\sphericalangle ABC$ übereinstimmen; denn wegen der Spitzwinkligkeit des Dreiecks ABC liegt der Höhenfußpunkt D zwischen B und C und der Höhenfußpunkt E zwischen A und C.

   Ferner gilt $\overline{\sphericalangle AEB} = \overline{\sphericalangle BDA} = 90°$ und $\overline{AB} = \overline{BA}$.

   Daher sind die Dreiecke ABE und BAD nach dem Kongruenzsatz (sww) kongruent, woraus $\overline{BE} = \overline{AD}$ folgt. □

b) Wenn für die Höhen AD und BE eines spitzwinkligen Dreiecks ABC $\overline{BE} = \overline{AD}$ gilt, so folgt: Es giltc$\overline{\sphericalangle AEB} = \overline{\sphericalangle BDA} = 90°$ und $\overline{AB} = \overline{BA}$.

   Ferner liegen die Winkel $\sphericalangle AEB$ bzw. $\sphericalangle BDA$ als rechte Winkel jeweils den größten Seiten in den Dreiecken ABE bzw. BAD gegenüber. Daher sind die Dreiecke ABE und ABD nach dem Kongruenzsatz (ssw) kongruent, woraus $\overline{\sphericalangle BAE} = \overline{\sphericalangle ABD}$ folgt.

   Diese Winkel stimmen wiederum mit den Winkeln $\sphericalangle BAC$ bzw. $\sphericalangle ABC$ überein, also ist das Dreieck ABC wegen der gleichgroßen Innenwinkel bei A und B gleichschenklig mit $\overline{AB} = \overline{BC}$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission