20. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1980/1981

Aufgaben und Lösungen

20. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 200711:
Anläßlich der Siegerehrung eines Mathematikwettbewerbs beglückwünschte jeder Preisträger jeden anderen mit einem Händedruck. Insgesamt wurden dabei 91 Händedrücke ausgeführt, und zwar bei jedem der Glückwünsche genau einer.

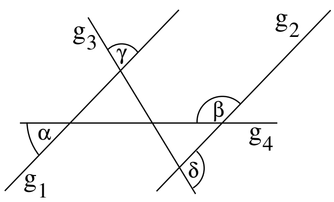
Ermittle aus dieser Angabe die Anzahl der Preisträger des Wettbewerbs!

Aufgabe 200712:
Aus einem alten ägyptischen Rechenbuch (1700 v.u.Z.) stammt folgende Aufgabe:

Ein Wanderer stellt fest, daß ein Hirt 70 Schafe auf die Weide führt. Er fragt den Hirten: "Sind die Schafe, die du hier führst, deine sämtlichen Schafe?" - "Nein", antwortet der Hirt, "ich führe nur zwei Drittel von einem Drittel der gesamten Herde, die mir anvertraut ist, auf die Weide."

Ermittle die Stückzahl der gesamten Herde, die diesem Hirten anvertraut war!

Aufgabe 200713:



Vier Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 mögen sich so schneiden, wie es aus dem Bild ersichtlich ist. Für die Größen α, β, γ der dort angegebenen Winkel gelte $\alpha = 50°$, $\beta = 130°$, $\gamma = 70°$.

Ermittle aus diesen gegebenen Größen die Winkelgröße δ!

Aufgabe 200714:
Beweise folgenden Satz:

Ist M der Mittelpunkt der Seite AB eines Dreiecks ABC und gilt $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$, so ist das Dreieck ABC rechtwinklig.

20. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 200711:

Es sei n die Anzahl der Preisträger. Zählt man für jeden Preisträger die Händedrücke, die er mit den anderen Preisträgern ausführte, und addiert die erhaltenen Zahlen, so ergibt sich die Summe von n Summanden $n-1$, also die Zahl $n \cdot (n-1)$. In dieser Zahl ist jeder der insgesamt auftretenden Händedrücke genau zweimal erfaßt (nämlich in den Abzählungen für jeden der beiden Partner des betreffenden Händedrucks). Folglich ist die Anzahl aller Händedrücke gleich $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Daher gilt $\frac{1}{2}n(n-1) = 91$, also $(n-1)n = 182$.

Erste Fortsetzungsmöglichkeit: Wegen der Primzerlegung $182 = 2 \cdot 7 \cdot 13$ hat 182 in natürlichen Zahlen bis auf die Reihenfolge nur die Faktorzerlegungen $182 = 1 \cdot 182 = 2 \cdot 91 = 7 \cdot 26 = 13 \cdot 14$. Davon ist nur $13 \cdot 14$ eine Zerlegung in zwei Faktoren der Form $n-1$ und n. Also ist die gesuchte Anzahl $n = 14$.

Zweite Fortsetzungsmöglichkeit: Wäre $n < 14$, so wäre $(n-1)n < 13 \cdot 14 = 182$; wäre $n > 14$, so wäre $(n-1)n > 13 \cdot 14 = 182$. Also verbleibt nur die Möglichkeit $n = 14$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200712:

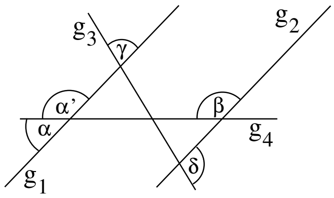
Ist x die gesuchte Stückzahl der gesamten Herde, so ist ein Drittel der Herde $\frac{x}{3}$, und zwei Drittel von diesem Drittel sind $\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{3}$. Daher gilt nach dem Aufgabentext:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot 13 &= 70, \quad \text{also} \\ \frac{2x}{9} &= 70, \\ 2x &= 630, \\ x &= 315. \end{aligned}$$

Die Stückzahl der gesamten Herde beträgt daher 315.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200713:



Mit der aus der Abbildung ersichtlichen Bezeichnung der Winkelgrößen gilt $\alpha' = 18O° - \alpha$ als Nebenwinkel, also $\alpha' = 180° - 50° = 130° = \beta$.

Da α' und β die Größen von Stufenwinkeln an den geschnittenen Geraden g_1, und g_2 sind, gilt laut Umkehrung des Stufenwinkelsatzes $g_1 \parallel g_2$.

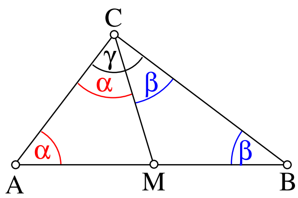
Ferner sind δ und γ die Größen von entgegengesetzt liegenden Winkeln an den geschnittenen Geraden g_1 und g_2. Da diese Geraden parallel sind, gilt

$$\begin{aligned} \delta + \gamma &= 180° \\ \delta &= 180° - \gamma = 180° - 70° = 110°. \end{aligned}$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200714:

Es sei $\alpha = \overline{\sphericalangle CAB}$, $\beta = \overline{\sphericalangle ABC}$, $\gamma = \overline{\sphericalangle ACB}$.



Nach Voraussetzung ist M der Mittelpunkt von AB, daher ist auch

$$\begin{aligned} \overline{\sphericalangle CAM} &= \alpha, \\ \overline{\sphericalangle MBC} &= \beta. \end{aligned}$$

Wegen $\overline{MA} = \overline{MC}$ ist das Dreieck ACM gleichschenklig mit $\overline{\sphericalangle ACM} = \alpha$, wegen $\overline{MB} = \overline{MC}$ ist auch das Dreieck BCM gleichschenklig mit $\overline{\sphericalangle BCM} = \beta$.

Daher ist $\alpha + \beta = \gamma$.

Andererseits ist nach dem Winkelsummensatz $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Daraus folgt $2\gamma = 180°$, also $\gamma = 90°$. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission