20. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Saison 1980/1981

Aufgaben und Lösungen

20. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 200621:

Ein Flugzeug, das mit konstanter (gleichbleibender) Geschwindigkeit von A nach B fliegt, war um 10.05 Uhr noch 2 100 km, um 11.20 Uhr nur noch 600 km von B entfernt.

Um welche Zeit wird es in B eintreffen, wenn es mit der bisherigen Geschwindigkeit weiterfliegt?

Aufgabe 200622:

Ein leeres quaderförmiges Wasserbecken ist 22 m lang, 6 m breit und 2 m tief. Beim Füllen des Beckens fließen in jeder Minute 900 l Wasser in das Becken.

Nach welcher Zeit ist das Becken bis zu einer Höhe von genau $1,50$ m gefüllt? Wir nehmen an, daß der Boden des Wasserbeckens genau waagerecht ist.

Aufgabe 200623:

Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen z, für die $1\,000 \leq z \leq 1\,700$ gilt und die durch 9, 12 und 14 teilbar sind!

Aufgabe 200624:

Vier Schüler, je einer aus der Klasse 5a, 5b, 6a, 6b, unterhalten sich über die Zeitschriften, die sie regelmäßig lesen. Die Schüler heißen Fred, Gerd, Hans und Ingo mit Vornamen. Wie sich herausstellt, liest jeder von ihnen genau eine der beiden Zeitschriften ”alpha” bzw. ”Frösi” regelmäßig. Ferner werden folgende Angaben gemacht:

(1) Der Schüler aus der Klasse 5b liest nicht die Zeitschrift ”alpha”.

(2) Hans und außer ihm der Schüler der Klasse 5a lesen die Zeitschrift ”alpha” regelmäßig.

(3) Fred und außer ihm der Schüler der Klasse 6b lesen die Zeitschrift ”Frösi” regelmäßig. Gerd dagegen nicht.

(4) Der Schüler der Klasse 6a, der Schüler der Klasse 5b und außer diesen beiden noch Gerd wurden von Ingo zum Geburtstag eingeladen.

Gesucht ist eine Zuordnung, durch die beschrieben wird, welcher der vier Schüler welche Klasse besucht und welche der beiden Zeitschriften er regelmäßig liest.

Untersuche, ob es eine solche Zuordnung gibt, die alle Angaben (1), (2), (3), (4) erfüllt, und ob sie durch diese Angaben eindeutig festgelegt ist! Wenn dies der Fall ist, dann gib diese Zuordnung an!

20. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 200621:

Die Zeit von 10.05 Uhr bis 11.20 Uhr beträgt 1 h 15 min = 75 min. Wegen $2\,100 - 600 = 1\,500$ hat das Flugzeug in dieser Zeit 1 500 km zurückgelegt. Wegen $75 : 15 = 5$ benötigt es für je 100 km also 5 min, wegen $6 \cdot 5 = 30$ für die noch zurückzulegenden 600 km mithin 30 min. Daher trifft es 30 min nach 11.20 Uhr, d.h. um 11.50 Uhr in B ein.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200622:

Wegen $22 \cdot 6 \cdot 1,5 = 22 \cdot 9 = 198$ enthält das bis zur Höhe von $1,50$ m gefüllte Becken 198 m^3 Wasser. Da 1 m^3 = 1 000 l sind, enthält das Becken also 198 000 l Wasser. Wegen $198\,000 : 900 = 220$ ist es somit nach genau 220 Minuten bis zur angegebenen Höhe gefüllt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200623:

Eine Zahl ist genau dann durch 9, 12 und 14 teilbar, wenn sie durch das kleinste gemeinsame Vielfache (k.g.V.) dieser Zahlen teilbar ist. Wegen der Primzahlzerlegungen

$$9 = 3^2, \qquad 12 = 2^2 \cdot 3, \qquad 14 = 2 \cdot 7$$

ist dieses k.g.V. die Zahl $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$.

Also ist eine natürliche Zahl z genau dann durch 9, 12 und 14 teilbar, wenn es zu ihr eine natürliche Zahl n mit $z = 252 \cdot n$ gibt. Alle gesuchten Zahlen z erhält man daher aus denjenigen n, für die $1\,000 \leq 252n \leq 1\,700$ gilt.

Nun stellt man fest:

Für $n = 3$ gilt $252n = 252 \cdot 3 = 756 < 1\,000$;
für $n = 7$ gilt $252n = 252 \cdot 7 = 1764 > 1\,7000$;

für diese n erhält man also keine Zahlen z, die die genannten Bedingungen der Ungleichung erfüllen.

Für $n = 4$ wird $z = 252 \cdot 4 = 1\,008$;
für $n = 5$ wird $z = 252 \cdot 5 = 1\,260$;
für $n = 6$ wird $z = 252 \cdot 6 = 1\,512$;

diese drei Zahlen erfüllen also die Bedingung $1\,000 \leq z \leq 1\,700$. Daher sind genau 1008, 1260 und 1512 die gesuchten Zahlen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200624:

Angenommen, es gibt eine solche Zuordnung, für die die gemachten Angaben zutreffen.

Dann ist Gerd wegen (3) und (4) weder der Schüler der Klasse 6b noch der Schüler der Klasse 6a noch der der Klasse 5b. Also besucht Gerd die Klasse 5a und liest wegen (2) [oder wegen (3)] die Zeitschrift "alpha" regelmäßig.

Folglich gehört Ingo nicht der Klasse 5a an, nach (4) auch keiner der Klassen 6a oder 5b. Somit besucht Ingo die Klasse 6b und liest wegen (3) die Zeitschrift "Frösi" regelmäßig.

Hans gehört demnach weder der Klasse 5a noch der Klasse 6b an. Da er nach (2) regelmäßig die Zeitschrift "alpha" liest, ist er wegen (1) auch nicht der Schüler der Klasse 5b. Also besucht Hans die Klasse 6a.

Für Fred verbleibt somit nur noch die Klasse 5b. Hiernach und nach (1) liest er regelmäßig die Zeitschrift "Frösi". Damit ist gezeigt: Wenn es eine Zuordnung gibt, für die die gemachten Angaben zutreffen, dann kann es nur die folgende Zuordnung sein:

Vorname	Klasse	Zeitschrift
Gerd	5a	"alpha"
Fred	5b	"Frösi"
Hans	6a	"alpha"
Ingo	6b	"Frösi"

Man überzeugt sich leicht, daß für diese Zuordnung die gemachten Angaben tatsächlich zutreffen. Damit ist gezeigt, daß genau diese Zuordnung mit den gemachten Angaben übereinstimmt.

Zweiter Lösungsweg: Angenommen, es gibt eine solche Zuordnung, die die gestellten Bedingungen (1) bis (4) erfüllt. Da jeder Schüler genau eine der beiden Zeitschriften regelmäßig liest, folgt aus (1) und (3) die Feststellung:

(5) Die beiden Schüler aus den Klassen 5b bzw. 6b lesen regelmäßig die Zeitschrift "Frösi"; Gerd liest regelmäßig die Zeitschrift "alpha".

Wegen (2) lesen mindestens zwei Schüler regelmäßig die Zeitschrift "alpha". Wegen (5) können dies nur die Schüler aus'den Klassen 5a bzw. 6a sein, und wegen (2) folgt hieraus:

(6) Hans geht in die Klasse 6a und liest regelmäßig die Zeitschrift "alpha",

Aus (3) und (5) folgt dann:

(7) Fred geht in die Klasse 5b und liest regelmäßig die Zeitschrift "Frösi".

Da Gerd wegen (3) nicht in die Klasse 6b geht, muß er wegen (6) und (7) in die Klasse 5a gehen, woraus dann wegen (5) folgt:

(8) Gerd geht in die Klasse 5a und liest regelmäßig die Zeitschrift "alpha".

Als letzte Möglichkeit verbleibt danach für Ingo:

(9) Ingo geht in die Klasse 6b und liest regelmäßig die Zeitschrift "Frösi".

Damit ist gezeigt: Wenn es eine Zuordnung gibt, die die Bedingungen (1) bis (4) erfüllt, dann kann es nur die in (6) bis (9) angegebene Zuordnung sein.

Man überzeugt sich leicht, daß diese Zuordnung tatsächlich die gegebenen Bedingungen (1) bis (4) erfüllt. Folglich ist die genannte Zuordnung die einzige, die alle gestellten Bedingungen erfüllt.

Hinweis zur Korrektur: Beim zweiten Lösungsweg erkennt man, daß zur Gewinnung der Lösung (Eindeutigkeitsnachweis) die Angabe (4) nicht benötigt wird. Würde man in der Aufgabe die Angabe (4) durch eine Angabe ersetzen, die den Angaben (1), (2), (3) widerspricht (etwa durch

(4*) Der Schüler der Klasse 6a, der Schüler der Klasse 5b und außer diesen beiden noch Hans wurden von Ingo zum Geburtstag eingeladen.),

dann würde man beim zweiten Lösungsweg erst bei der Probe merken, daß diese (andere) Aufgabe gar keine Lösung besitzt. Dadurch wird deutlich, daß die Probe hier nicht entbehrlich ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission