19. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1979/1980

Aufgaben und Lösungen

19. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 190711:

Eine Gruppe von 8 Schülern hebt bei der Produktionsarbeit im Patenbetrieb einen Graben von 30 cm Breite, 60 cm Tiefe und 20 m Länge aus. Eine zweite Gruppe von 6 Schülern hebt einen Graben von 25 cm Breite, 50 cm Tiefe und 22 m Länge aus.

Es werde vorausgesetzt, daß von jedem der 14 Schüler für das Ausheben gleich großer Volumina gleiche Zeiten benötigt werden (wobei die für das Ausheben eines bestimmten Volumens benötigte Zeit bei allen Schülern dieselbe sei).

Welche der beiden Gruppen benötigt für das Ausheben ihres Grabens unter diesen Voraussetzungen weniger Zeit als die andere?

Aufgabe 190712:

Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die die Eigenschaft haben, durch jede der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15 teilbar zu sein!

Aufgabe 190713:

Es sei ΔABC ein rechtwinkliges Dreieck; C sei der Scheitel des rechten Winkels. Die Halbierende dieses Winkels schneide die Seite AB in D. Der Fußpunkt des Lotes von D auf AC sei E.

Beweise hierfür die folgende Aussage:

Wenn $\sphericalangle CAB = 22,5°$ ist, dann gilt $\sphericalangle ADE = \sphericalangle CDB$!

Aufgabe 190714:

Sechs Schüler halfen bei der Obsternte; Sie erhielten Anerkennungsprämien entsprechend ihren Leistungen. Jeder von ihnen übergab die Hälfte des erhaltenen Geldbetrages dem Solidaritätskonto. Über diese Schüler ist ferner folgendes bekannt:

(1) Keiner von ihnen spendete weniger als 6 M und keiner mehr als 12 M.

(2) Konrad spendete mehr als Peter.

(3) Helga spendete mehr als Gisela, Gisela mehr als Peter, Peter mehr als Inge.

(4) Frank spendete mehr als Helga und Helga mehr als Konrad.

(5) Helga spendete 2 M weniger als Frank, Peter 2 M mehr als Inge.

(6) Alle spendeten volle Markbeträge.

Wieviel Geld erhielt jeder der Schüler für das Obstpflücken?

19. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 190711:

Das Volumen des Grabens der ersten Gruppe beträgt $(3 \cdot 6 \cdot 200)\,\mathrm{dm}^3 = 3\,600\,\mathrm{dm}^3$; für jeden der 8 Schüler dieser Gruppe ist daher ein Volumen von $(3\,600 : 8)\,\mathrm{dm}^3 = 450\,\mathrm{dm}^3$ auszuheben.

Das Volumen des Grabens der zweiten Gruppe beträgt $(2,5 \cdot 5 \cdot 220)\,\mathrm{dm}^3 = 2\,750\,\mathrm{dm}^3$; für jeden der 6 Schüler dieser Gruppe ist daher ein Volumen von $(2\,750 : 6)\,\mathrm{dm}^3 = 458\frac{1}{3}\,\mathrm{dm}^3$ auszuheben.

Hat jeder der Schüler so lange gearbeitet, bis er $458\,\mathrm{dm}^3$ ausgehoben hat, so ist die erste Gruppe fertig, die zweite noch nicht. Daher benötigt die erste Gruppe weniger Zeit als die zweite.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 190712:

Eine natürliche Zahl ist genau dann durch die angegebenen Zahlen teilbar, wenn sie durch deren k.g.V. teilbar ist. Wegen der Primfaktorzerlegung

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl@{\qquad}rcl@{\qquad}rcl} 2 &=& 2 & 5 &=& 5 & 8 &=& 2^3 & 12 &=& 2^2 \cdot 3 \\ 3 &=& 3 & 6 &=& 2 \cdot 3 & 9 &=& 3^2 & 14 &=& 2 \cdot 7 \\ 4 &=& 2^2 & 7 &=& 7 & 10 &=& 2 \cdot 5 & 15 &=& 3 \cdot 5 \end{array}$$

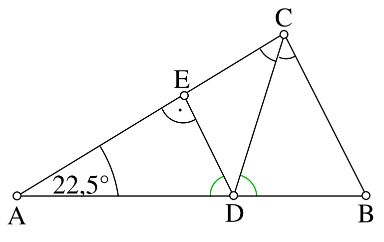
ist dieses k.g.V. die Zahl $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2\,520$. Alle (von 0 verschiedenen) natürlichen Vielfachen dieser Zahl sind: Die Zahlen $1 \cdot 2\,520 = 2\,520$, $2 \cdot 2\,520 = 5\,040$, $3 \cdot 2\,520 = 7\,560$ sowie alle Zahlen $n \cdot 2\,520$ mit natürlichem $n \geq 4$.

Für jedes $n \geq 4$ gilt aber: Wegen $n \cdot 2\,520 \geq 4 \cdot 2\,520 = 10\,080$ ist die Zahl $n \cdot 2\,520$ nicht vierstellig.

Daher erfüllen genau die Zahlen 2 520, 5 040 und 7 560 die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 190713:



Aus $\overline{\sphericalangle EAD} = \overline{\sphericalangle CAB} = 22,5°$ und $\overline{\sphericalangle AED} = 90°$ folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck $\overline{\sphericalangle ADE} = 180° - 90° - 22,5° = 67,5°$.

Aus $\overline{\sphericalangle CAB} = 22,5°$ und $\overline{\sphericalangle ACB} = 90°$ folgt ebenso $\overline{\sphericalangle ABC} = 67,5°$.

Ferner ist nach Voraussetzung $\overline{\sphericalangle BCD} = \frac{90°}{2} = 45°$;

hieraus und aus $\overline{\sphericalangle DBC} = \overline{\sphericalangle ABC} = 67,5°$ folgt wiederum nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck: $\overline{\sphericalangle CDB} = 180° - 67,5° - 45° = 67,5°$. Damit ist der geforderte Beweis geführt. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 190714:

Es seien f, g, h, i, k, p die von Frank, Gisela, Helga, Inga, Konrad bzw. Peter gespendeten Geldbeträge in Mark. Aus den Angaben der Aufgabenstellung folgt damit:

(7) $h > g > p$, $f > h > k > p > i$ aus (2), (3), (4)

(8) $f = h + 2$, $p = i + 2$ aus (5)

(9) $f \leq 12$, $i \geq 6$ aus (1)

(10) $h \leq 10$, $p \geq 8$ aus (8)

(11) Wäre in (9) sogar $f < 12$ oder $i > 6$ so folgte aus (8) $h < 10$ oder $p > 8$; unter der Bedingung (10) kann jedoch $h > g > p$ durch keine ganze Zahl g erfüllt werden. Daher scheidet dieser Fall aus,

(12) d.h. in (9) muß $f = 12$, $i = 6$ gelten.

(13) Somit folgt aus (8) $h = 10$, $p = 8$;

(14) hiernach können die Ungleichungen $h > g > p$ und $h > k > p$ ganzzahlig nur durch $g = 9$, $k = 9$ erfüllt werden.

Da die somit ermittelten Spenden [(12), (13), (14)] die Hälfte der erhaltenen Beträge waren, folgt: Frank erhielt 24 M, Gisela 18 M, Helga 20 M, Inge 12 M, Konrad 18 M und Peter 16 M.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission