



19. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Saison 1979/1980

Aufgaben und Lösungen





19. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 190611:

Von einem Busbahnhof fahren um 12.00 Uhr gleichzeitig vier Busse ab. Die Zeit, die jeweils bis zur nächsten Rückkehr und anschließenden erneuten Abfahrt vom gleichen Busbahnhof vergeht, beträgt

für den ersten Bus $\frac{3}{4}$ h,

für den zweiten Bus $\frac{1}{2}$ h,

für den dritten Bus 36 Minuten und

für den vierten Bus 1 Stunde.

Zu welcher Uhrzeit fahren hiernach erstmalig alle vier Busse wieder gleichzeitig von dem Busbahnhof ab? Wie viele Fahrten hat jeder der vier Busse bis dahin durchgeführt?

Aufgabe 190612:

Ulrike möchte vier natürliche Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge angeben, so daß folgendes gilt:

Die zweite Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der ersten Zahl,

die dritte Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der zweiten Zahl,

die vierte Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der dritten Zahl,

die Summe der vier angegebenen Zahlen beträgt 79.

Zeige, wie man alle Zahlen finden kann, die diese Bedingungen erfüllen! Überprüfe, ob die gefundenen Zahlen alle Bedingungen erfüllen!

Aufgabe 190613:

In einem Kästchen befinden sich 12 rote, 15 blaue und 8 gelbe Kugeln, die sich nur durch ihre Farbe unterscheiden. Anke will mit verbundenen Augen eine Anzahl dieser Kugeln herausnehmen. Die Anzahl will sie so wählen, daß sie mit Sicherheit erreicht, daß sich unter den herausgenommenen Kugeln 5 von gleicher Farbe befinden.

Sie meint: "Es genügt hierzu, 15 Kugeln herauszunehmen."

Birgit meint: "Es genügen sogar 13 Kugeln."

Cornelia behauptet: "Es genügen dafür 12 Kugeln."

Entscheide für jede der drei Meinungen, ob sie wahr ist, und begründe deine Entscheidung!



Aufgabe 190614:

Drei Pioniere einer Schule, Karin, Dieter und Frank, wurden zur Kreisolympiade Junger Mathematiker delegiert und errangen einen ersten, einen zweiten und einen dritten Preis (jeder der drei Pioniere genau einen dieser Preise). Später erkundigte sich Anette nach dem Abschneiden der drei Olympiadeteilnehmer. Man sagte ihr:

”Dieter erhielt keinen ersten Preis.” (1)

”Karin erhielt keinen zweiten Preis.” (2)

”Frank erhielt einen zweiten Preis” (3)

Später stellte sich heraus, daß von diesen drei Aussagen genau eine wahr, die anderen dagegen falsch waren.

Welcher der drei Schüler erhielt hiernach den ersten, welcher den zweiten und welcher den dritten Preis?



19. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Lösung 190611:

Die Abfahrzeiten lauten

für den ersten Bus: 12.00, 12.45, 13.30, 14.15, 15.00, ...,

für den zweiten Bus: 12.00, 12.30, 13.00, 13.30, 14.00, 14.30, 15.00, ...,

für den dritten Bus: 12.00, 12.36, 13.12, 13.48, 14.24, 15.00, ...,

für den vierten Bus: 12.00, 13.00, 14.00, 15.00, ...,

Daraus ist zu sehen: Die vier Busse fahren erstmalig um 15.00 Uhr wieder gleichzeitig ab. Bis dahin hat

der erste Bus 4 Fahrten

der zweite Bus 6 Fahrten

der dritte Bus 5 Fahrten

der vierte Bus 3 Fahrten

durchgeführt.

Hinweis: Die Aufgabe kann auch unter Anwendung des Begriffes k.g.V. gelöst werden. Die Anzahl der Minuten zwischen 12.00 Uhr und dem gesuchten Zeitpunkt muß das k.g.V. der Zahlen 45, 30, 36 und 60, d.h. die Zahl 180 sein.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 190612:

Angenommen, vier Zahlen erfüllen die gestellten Bedingungen. Die erste Zahl sei mit a bezeichnet. Die zweite, Zahl lautet dann $2a - 1$, die dritte Zahl $2(2a - 1) - 1 = 4a - 2 - 1 = 4a - 3$, die vierte Zahl $2(4a - 3) - 1 = 8a - 6 - 1 = 8a - 7$. Daher ist die Summe der vier Zahlen

$$a + 2a - 1 + 4a - 3 + 8a - 7 = 15a - 11.$$

Aus $15a - 11 = 79$ folgt $15a = 90$. Daraus folgt, daß die erste Zahl $a = 6$ lautet, die zweite, dritte, vierte also 11, 21 bzw. 41.

Daher können nur die Zahlen 6, 11, 21, 41 (in dieser Reihenfolge) die Bedingungen erfüllen.

Die folgende Überprüfung zeigt, daß sie alle geforderten Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } 2 \cdot 6 - 1 &= 11, \\ 2 \cdot 11 - 1 &= 21, \\ 2 \cdot 21 - 1 &= 41 \text{ und} \\ 6 + 11 + 21 + 41 &= 79. \end{aligned}$$



Hinweis: Die Aufgabe kann auch durch systematisches Probieren, gelöst werden (etwa $4 + 7 + 13 + 25 = 49$; $5 + 9 + 17 + 33 = 64$; $6 + 11 + 21 + 41 = 79$; $7 + 13 + 25 + 49 = 94$). Dabei muß bewiesen werden, daß es keine weitere Lösung gibt, z.B., indem bemerkt wird, daß bei Vergrößerung der Anfangszahl sich alle Summanden und damit die Summe vergrößern.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 190613:

Cornelias Meinung ist falsch; denn greift man 12 Kugeln heraus, so erreicht man nicht mit Sicherheit, daß sich darunter 5 von gleicher Farbe befinden. Es können nämlich 4 rote, 4 blaue und 4 gelbe Kugeln herausgegriffen worden sein.

Birgits Meinung ist wahr; denn hat man 13 Kugeln herausgegriffen, so gibt es nur folgende Möglichkeiten:

1. Die ersten 12 herausgegriffenen Kugeln sind 4 rote, 4 blaue und 4 gelbe. Dann muß die 13. Kugel eine dieser Farben haben; von dieser Farbe befinden sich also insgesamt 5 unter den 13 herausgegriffenen Kugeln, wie es erreicht werden sollte.
2. Die Farbverteilung unter den ersten 12 Kugeln ist eine andere als 4 rote, 4 blaue und 4 gelbe. Dann hat sich gegenüber dieser Verteilung die Anzahl für mindestens eine dieser Farben erhöht, da sonst nicht insgesamt 12 Kugeln in der geänderten Verteilung vorliegen könnten. Also befinden sich bereits unter 12 Kugeln von mindestens einer Farbe mindestens 5 Kugeln. Damit ist dies erst recht für die 13 herausgegriffenen Kugeln der Fall.

Ankes Meinung ist ebenfalls wahr; denn schon unter 13, erst recht also unter 15 Kugeln befinden sich 5 von gleicher Farbe.

Hinweis: Der Beweis, daß Birgits Meinung wahr ist, kann auch kürzer durch folgende Überlegung geführt werden: Wären unter 13 herausgegriffenen Kugeln nicht 5 von gleicher Farbe, so wären insgesamt höchstens, 4 rote, höchstens 4 blaue und höchstens 4 gelbe, also zusammen höchstens 12 Kugeln herausgegriffen worden.

Bei der Korrektur ist der Unterschied zwischen diesen beiden Varianten zu beachten, daß man nämlich bei der einen Variante zwei Fälle unterscheiden muß, bei der anderen dagegen nicht.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 190614:

Dieter erhielt keinen zweiten Preis; denn hätte er einen zweiten Preis erhalten, so wären die 1. und die 2. Aussage wahr gewesen.

Auch Frank erhielt keinen zweiten Preis; denn hätte er einen zweiten Preis erhalten, so wären die 2. und die 3. Aussage wahr gewesen.

Also erhielt Karin einen zweiten Preis. Somit waren die 2. und die 3. Aussage falsch, die erste dagegen wahr. Folglich erhielt Dieter, da er weder einen ersten noch einen zweiten Preis erhalten haben konnte, einen dritten Preis. Den ersten Preis konnte schließlich nur Frank errungen haben; denn die beiden übrigen Preise hatten ja Karin und Dieter bekommen.

Hinweis: Für Schüler ist möglicherweise eine Fallunterscheidung naheliegender, die von der Frage ausgeht, welche der drei Aussagen die wahre ist. Dies führt auch zu einem möglichen Lösungsweg, allerdings auf etwas umständlichere Weise.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)



Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission