17. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1977/1978

Aufgaben und Lösungen

17. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 170711:

Matthias war in den Sommerferien in einem internationalen Pionierzeltlager. Er berichtet seinen Klassenkameraden:

> "Ein Viertel aller Teilnehmer und vier Pioniere kamen aus der Sowjetunion, ein Fünftel aller Teilnehmer und fünf Pioniere aus der DDR, ein Sechstel aller Teilnehmer und sechs Pioniere aus der CSSR, ein Achtel aller Teilnehmer und acht Pioniere aus der VR Polen, ein Neuntel aller Teilnehmer und neun Pioniere aus der VR Bulgarien. Die übrigen 21 Pioniere kamen aus der Ungarischen Volksrepublik. In jedem Zelt des Lagers waren genau acht Pioniere untergebracht."

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Zelte des Lagers!

Aufgabe 170712:

Gegeben sei ein Dreieck ABC. Es sei g die Gerade durch den Punkt A und den Mittelpunkt D der Seite BC. Beweise, daß dann die Punkte B und C den gleichen Abstand von der Geraden g haben!

Aufgabe 170713:

Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 9,7$ cm, $b = 7,6$ cm und $\beta + \gamma = 115°$!

Dabei sei a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC, β die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$ und γ die des Winkels $\sphericalangle ACB$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 170714:

Der kleine Uwe hat würfelförmige, weiß gefärbte Bausteine mit einer Kantenlänge von 2 cm und würfelförmige, rot gefärbte Bausteine mit einer Kantenlänge von 3 cm. Er baute einen größeren, zusammengesetzten Würfelkörper auf und verwendete dazu nur Steine dieser beiden Sorten. Dabei bestanden die vier senkrecht stehenden Außenwände aus roten Bausteinen, der restliche Würfelkörper bestand von unten bis oben durchgehend aus weißen Bausteinen.

Ermittle die Anzahl der hierbei verwendeten weißen und die der verwendeten roten Bausteine, wobei vorausgesetzt wird, daß Uwe nicht mehr als 60 Bausteine von jeder Sorte zur Verfügung hatte!

17. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 170711:

Es sei x die Anzahl aller Teilnehmer. Dann gilt laut Aufgabe:

$$x = \left(\frac{1}{4}x + 4\right) + \left(\frac{1}{5}x + 5\right) + \left(\frac{1}{6}x + 6\right) + \left(\frac{1}{8}x + 8\right) + \left(\frac{1}{9}x + 9\right) + 21,$$

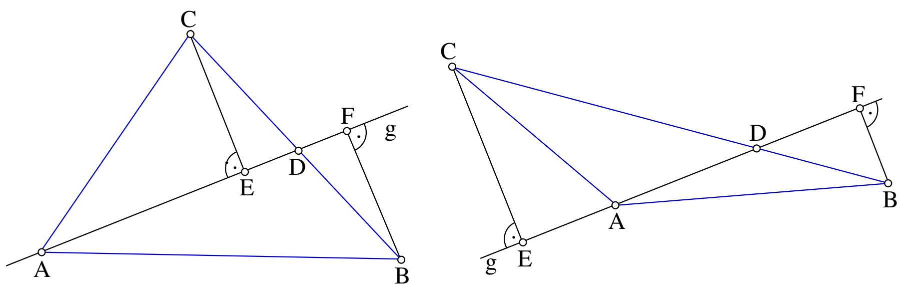
woraus man erhält:

$$\begin{aligned} x &= \frac{90 + 72 + 60 + 45 + 40}{360}x + 53 = \frac{307}{360}x + 53 \\ 360x &= 307x + 53 \cdot 360 \\ 53x &= 53 \cdot 360 \\ x &= 360. \end{aligned}$$

Wegen $360 : 8 = 45$ betrug die Anzahl der Zelte mithin 45.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 170712:



Das Lot von C bzw. von B auf g sei CE bzw. BF (siehe Abb.). Ist BC nicht senkrecht auf g, so sind E und F von D verschieden, und es entstehen zwei Dreiecke CDE und BDF. Diese stimmen in den Seitenlängen $\overline{CD}$, $\overline{BD}$, den Größen der anliegenden Winkel $\sphericalangle CDE$ und $\sphericalangle BDF$ (Scheitelwinkel) und denen der gegenüberliegenden (rechten) Winkel $\sphericalangle CED$, $\sphericalangle BFD$ überein.

Also gilt $\Delta CDE \cong \Delta BFD$, und daraus folgt $\overline{CE} = \overline{BF}$.

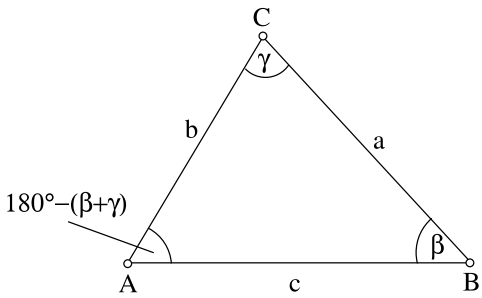
Ist BC senkrecht auf g, so fallen E und F mit D zusammen, woraus $\overline{CE} = \overline{CD} = \overline{BD} = \overline{BF}$ folgt. Somit sind in jedem Falle die Abstände $\overline{BF}$ und $\overline{CE}$ der Punkte B und C von g einander gleich. $\square$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 170713:

(I) Angenommen, ΔABC sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, hat der $\sphericalangle BAC$ die Größe $180° - (\beta + \gamma)$. Daher sind im Dreieck ABC die Längen zweier Seiten und die Größe eines Winkels bekannt, der einer der beiden Seiten gegenüberliegt.



Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(II) (1) Wir zeichnen eine Strecke AC der Länge b.

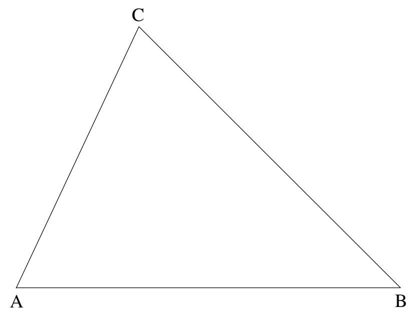
(2) Wir tragen in A an AC einen Winkel der Größe $180° - (\beta + \gamma)$ an.

(3) Wir zeichnen den Kreis um C mit a. Schneidet er den freien Schenkel des nach (2) angetragenen Winkels, so sei ein Schnittpunkt B genannt.

(III) Jedes so erhaltene Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion ist $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ und nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck $\overline{\sphericalangle ABC} + \overline{\sphericalangle BCA} = \beta + \gamma$.

(IV) Wegen $a > b$ ist die Konstruktion nach dem Kriterium ssw bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar (siehe Abb.).



Maßstab 1:2

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 170714:

Die Höhe des von Uwe gebauten Würfelkörpers läßt sich sowohl aus einer Anzahl r roter Steine als auch aus einer Anzahl w weißer Steine zusammensetzen. Sie ist ferner gleich der Breite des Würfelkörpers, die sich aus der Breite von 2 roten Steinen und der einer Anzahl v (≥ 1) weißer Steine ergibt. Daher ist ihre Maßzahl (in cm) die Zahl

(1) $3r = 2w = 2v + 2 \cdot 3$.

Hiermit ist $(2v + 2 \cdot 3)$ und folglich auch v durch 3 teilbar. Also gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und mit $v = 3n$, und aus (1) folgt

$$w = 3n + 3 \text{ sowie } r = 2n + 2.$$

Alle verwendeten weißen Steine bilden einen Quader. Dieser besteht aus w Schichten; jede von ihnen enthält v Reihen zu je v Steinen. Daher wurden genau $W = w \cdot v^2$ weiße Steine verwendet.

Wäre nun $n \geq 2$, so folgte $v \geq 6$, $w \geq 9$, also $W \geq 9 \cdot 36 > 60$ im Widerspruch zur Aufgabenstellung.

Somit gilt $n = 1$, $v = 3$, $w = 6$, $r = 4$, und damit werden genau $W = 6 \cdot 9 = 54$ weiße Steine verwendet. Alle verwendeten roten Steine sind in r Schichten angeordnet; jede von ihnen läßt sich aus vier Reihen zu je $(r - 1)$ Steinen zusammensetzen. Daher wurden genau

$$R = r \cdot 4(r - 1) = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$$

rote Steine verwendet.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.