16. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1976/1977

Aufgaben und Lösungen

16. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 160711:

Bei der 3. Stufe der XV. Mathematikolympiade erhielten die sechs Thälmann-Pioniere Anita, Bernd, Christine, Doris, Erich und Fritz je einen Preis. Genau zwei von ihnen erhielten volle Punktzahl.

Auf die Frage, welche beiden Pioniere volle Punktzahl erhielten, wurden folgende fünf Antworten gegeben:

(1) Anita und Christine;

(2) Anita und Fritz;

(3) Bernd und Fritz;

(4) Anita und Doris;

(5) Bernd und Erich.

Anschließend wurde festgestellt, daß in genau einer dieser fünf Antworten beide Angaben falsch sind, während in den übrigen vier jeweils eine Angabe wahr und eine falsch ist.

Wie heißen nach dieser Feststellung die beiden Preisträger, die die volle Punktzahl erhielten? Überprüfe, ob sich diese Frage aus den vorliegenden Antworten eindeutig beantworten läßt!

Aufgabe 160712:

Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... u.s.w. bis 100 derart hintereinander aufgeschrieben, daß eine Zahl z der Form $z = 12345678910111213...9899100$ entsteht.

a) Wieviel Stellen hat z?

b) Es sollen 100 Ziffern der Zahl z so gestrichen werden, daß die mit den restlichen Ziffern dargestellte Zahl z' möglichst groß ist. Dabei soll an der Reihenfolge der (in z') verbleibenden Ziffern von z nichts geändert werden.

   Ermittle, welche Ziffern zu streichen sind, und gib die ersten zehn Ziffern der neuen Zahl z' an!

Aufgabe 160713:

Es seien a und b zwei zueinander parallele Geraden. A und P seien Punkte auf a, ferner seien B und Q Punkte auf b. Dabei gelte $PQ \perp a$. Der Mittelpunkt von PQ sei M, und es sei c die Parallele zu a durch M.

Beweise folgenden Satz:

Ist S der Schnittpunkt von c mit AB, so gilt $\overline{AS} = \overline{BS}$

Aufgabe 160714:

Bei einem Radrennen auf einem Rundkurs von 1 km Länge hatte zu einem bestimmten Zeitpunkt der Radsportler A genau 500 m Vorsprung vor dem Radsportler B. B fuhr mit einer Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, A mit einer Geschwindigkeit von $45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Nach wieviel Minuten von dem angegebenen Zeitpunkt an gerechnet holte B den Fahrer A das erste Mal ein, wenn angenommen wird, daß beide mit gleichbleibender Geschwindigkeit fuhren?

b) Nach wieviel weiteren Minuten würde B den Fahrer A zum zweiten Mal einholen ("überrunden"), wenn beide Fahrer auch weiterhin mit jeweils gleichbleibender Geschwindigkeit weiterfahren würden?

Wieviele Runden hätte A und wieviele B zwischen dem ersten und dem zweiten Mal des Überholens zurückgelegt?

16. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 160711:

Angenommen, Anita hätte keine volle Punktzahl erreicht. Dann hätten nach den Feststellungen über die Antworten (1), (2), (4) genau zwei der Schüler Christine, Fritz und Doris volle Punktzahl bekommen, d.h., in genau einer der Aussagen (1), (2), (4) wären beide Angaben falsch. Im Widerspruch zur Aufgabe müßten dann aber auch in (5) beide Angaben falsch sein. Also hat Anita volle Punktzahl erreicht und Christine, Fritz und Doris demzufolge nicht.

Hätte außerdem Bernd volle Punktzahl erreicht, dann wären in keiner der Antworten (1) bis (5) beide Angaben falsch. Also hat Bernd keine volle Punktzahl bekommen. Daraus folgt, daß außer Anita nur Erich volle Punktzahl erreicht haben kann.

Tatsächlich steht diese Antwort mit allen Bedingungen der Aufgabe in Einklang: denn bei ihr sind in (3) beide Angaben falsch und in (1), (2), (4), (5) je genau eine Angabe falsch.

Die Preisträger mit voller Punktzahl sind also aus den vorliegenden Angaben eindeutig zu ermitteln; sie heißen Anita uad Erich.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 160712:

a) Die vorgegebene Zahl z entstand aus 9 einstelligen Zahlen, $9 \cdot 10$ zweistelligen Zahlen und der dreistelligen Zahl 100. Sie enthält mithin $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 192$ Stellen.

b) Von den insgesamt 192 Ziffern von z sollen in der zu bildenden Zahl z' genau 92 Ziffern erhalten bleiben. Von zwei 92stelligen Zahlen, die mit verschiedener Anzahl von Neunen beginnen, ist diejenige die größere, die mit der größeren Anzahl von Neunen beginnt.

   Vor der ersten in der Zahl auftretenden Neun stehen 8 von Neun verschiedene Ziffern, vor der zweiten weitere 19, vor der dritten, vierten und fünften wiederum je weitere 19 von Neun verschiedene Ziffern. Streichen wir diese, so sind insgesamt 84 Ziffern ($8 + 4 \cdot 19 = 84$) entfernt. Es sind noch 16 Ziffern zu streichen.

   Die Zahl beginnt dann so: 99999505152535455565757505960...........

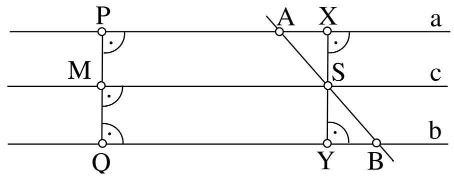
   Es ist nun nicht mehr möglich, die 19 Ziffern vor der nächsten (ursprünglich sechsten) Neun zu streichen, da dann mehr als 100 Ziffern entfielen.

   Von zwei 92stelligen Zahlen, die mit 5 Neunen beginnen und in der sechsten Stelle verschiedene Ziffern haben, ist diejenige größer, die an der sechsten Stelle die größere Zahl enthält. In unserem Fall kommt die Acht dafür nicht in Frage, da dann noch 17 Ziffern zu streichen wären. An der sechsten Stelle kann also höchstens eine Sieben stehen. Das ist auch erreichbar, wenn man die nächsten 15 Ziffern streicht.

Entsprechend zeigt man, daß als letzte Ziffer die auf die Sieben folgende Fünf entfernt werden muß. Die ersten zehn Ziffern der gesuchten Zahl z' lauten mithin 9999978596.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 160713:



Der Schnittpunkt von AB mit c sei S. Die Senkrechte zu c durch S schneide a in X und b in Y.

Ist $S = M$, so gilt $X = P$, $Y = Q$, also $\overline{XS} = \overline{YS}$.

Ist $S \neq M$, so sind $MSXP$ und $MSYQ$ Rechtecke, also gilt ebenfalls $\overline{XS} = \overline{PM} = \overline{QM} = \overline{YS}$.

Ist $A = X$, so gilt $B = Y$, also die Behauptung $\overline{AS} = \overline{BS}$.

Ist $A \neq X$, so sind die Dreiecke AXS und BYS nach (sww) kongruent; denn es gilt:

$$\begin{aligned} \overline{XS} &= \overline{YS} \\ \overline{\sphericalangle XSA} &= \overline{\sphericalangle YSB} \qquad \text{(Scheitelwinkel)} \\ \overline{\sphericalangle AXS} &= \overline{\sphericalangle BYS} = 90°. \end{aligned}$$

Also gilt auch in diesem Fall $\overline{AS} = \overline{BS}$. $\square$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 160714:

a) B muß innerhalb der gesuchten Zeit einen Vorsprung von 500 m aufholen. Innerhalb einer Stunde hätte B eine um 5 km = 5 000 m längere Strecke zurückgelegt als A, d.h. einen zehnmal so großen Vorsprung aufgeholt wie erforderlich. Also holte er den Vorsprung von A in $\frac{1}{10}$ Stunde, d.h. in 6 Minuten auf.

b) Bis zum zweiten Mal des Überholens hätte B einen Vorsprung von 1 km aufzuholen. Die dazu benötigte Zeit wäre demnach doppelt so lang wie bei a), also 12 Minuten. In dieser Zeit legte A eine Strecke von $\frac{1}{5} \cdot 45$ km = 9 km, also 9 Runden, zurück und B daher eine Runde mehr, d.h. 10 Runden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.