16. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Saison 1976/1977

Aufgaben und Lösungen

16. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 160611:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{AAA} & \cdot & \mathrm{A} & = & \mathrm{BBB} \\
+ & & & & - \\
\mathrm{CCC} & \cdot & \mathrm{E} & = & \mathrm{DDD} \\
\hline
\mathrm{FFF} & : & \mathrm{F} & = & \mathrm{GGG}
\end{array}$$

In diesem Schema sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß alle fünf angegegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind.

Ermittle alle möglichen derartigen Eintragungen!

Aufgabe 160612:

Knut ist ein sehr trainierter Radfahrer. Bei einem Ausflug legte er auf seinem Fahrrad in der Minute durchschnittlich 320 m zurück. Er fuhr um 7.00 Uhr mit seinem Rad ab und erreichte um 11.00 Uhr sein Ziel. Von 9.00 Uhr bis 9.20 Uhr hatte er gerastet, in der übrigen Zeit ist er ununterbrochen gefahren.

Wie lang (in km) ist die dabei von Knut insgesamt zurückgelegte Strecke?

Aufgabe 160613:

Luise sucht eine natürliche Zahl x, die sie vom Zähler des Bruches $\frac{17}{19}$ subtrahieren und gleichzeitig zum Nenner dieses Bruches addieren möchte, wobei der so entstehende Bruch den Wert $\frac{7}{11}$ erhalten soll.

Stelle fest, ob es eine solche Zahl x gibt, ob sie die einzige ist, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, und wie sie lautet!

Aufgabe 160614:

Eine Gruppe von mehr als 10, aber weniger als 50 Thälmann-Pionieren wollte eine Wanderfahrt durchführen. Sie brauchte dazu genau 91 Mark. Jeder Pionier der Gruppe zahlte eine einheitlich festgesetzte Anzahl von 1-Mark-Stücken (und keine weiteren Geldbeträge) in die Reisekasse. Ein dann noch fehlender Restbetrag von genau 26 Mark wurde aus der Pionierkasse bestritten.

Ermittle die Anzahl der Pioniere dieser Gruppe und den Betrag, den jeder von ihnen zur Bezahlung dieser Fahrt in die Reisekasse zahlte!

16. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 160611:

Wenn es eine derartige Eintragung gibt, so folgt aus der 3. Zeile $G = 1$. Ferner folgt aus der 1. Zeile, daß B das Quadrat von $A(\neq B)$ ist, also $B = 4$ oder $B = 9$ gilt und daher $D = 3$ oder $D = 8$ sein muß.

Andererseits ist D (nach der 2. Zeile) das Produkt zweier von D verschiedener Ziffern C, E, also keine Primzahl.

Daher verbleibt nur die Möglichkeit $D = 8$, $B = 9$, $A = 3$.

Da $8 = 2 \cdot 4$ bis auf die Reihenfolge die einzige Zerlegung von 8 in zwei von 8 verschiedene Faktoren ist, folgt entweder $C = 2$, $E = 4$ oder $C = 4$, $E = 2$.

Im ersten Fall ergibt sich $F = 5$, im zweiten Fall $F = 7$. Also können nur die Eintragungen

$$\begin{array}{ccccc} 333 & \cdot & 3 & = & 999 \\ + & & & & - \\ 222 & \cdot & 4 & = & 888 \\ \hline 555 & : & 5 & = & 111 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccccc} 333 & \cdot & 3 & = & 999 \\ + & & & & - \\ 444 & \cdot & 2 & = & 888 \\ \hline 777 & : & 7 & = & 111 \end{array}$$

alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Sie erfüllen diese Bedingungen auch; denn die für A, B, C, D, E, F, G eingesetzten Ziffern 3, 9, 2, 8, 4, 5, 1, bzw. 3, 9, 4, 8, 2, 7, 1 sind jeweils sämtlich voneinander verschieden, und die angegebenen Rechenaufgaben sind richtig gerechnet.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 160612:

Die Zeit von 7.00 Uhr bis 11.00 Uhr beträgt 4 Stunden, das sind 240 Minuten. Die Rastzeit beträgt 20 Minuten, die Fahrzeit also 220 Minuten.

Wegen $220 \cdot 320 = 70\,400$ ist die von Knut insgesamt zurückgelegte Strecke mithin $70\,400\,\mathrm{m} = 70{,}4\,\mathrm{km}$ lang.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 160613:

I) Wenn x eine solche Zahl ist, dann gilt für sie

$$\frac{17-x}{19+x} = \frac{7}{11}.$$

Da der Bruch $\frac{7}{11}$ durch keine natürliche Zahl gekürzt werden kann, muß der Bruch $\frac{17-x}{19+x}$ durch Erweitern aus dem Bruch $\frac{7}{11}$ hervorgehen. Also muß die Zahl $19 + x$ ein Vielfaches der Zahl 11 sein.

Das kleinste Vielfache von 11, das größer als 19 (oder gleich 19) ist, ist 22. Also muß x mindestens 3 betragen. Wäre $x > 3$, so wäre in dem Bruch $\frac{17-x}{19+x}$ der Zähler kleiner als 14, und der Nenner größer als 22, der Bruch folglich kleiner als $\frac{14}{22} = \frac{7}{11}$.

Somit kann nur die Zahl $x = 3$ die verlangte Eigenschaft haben.

II) Sie hat diese Eigenschaft; denn subtrahiert man sie vom Zähler 17 und addiert sie zum Nenner 19, so entsteht der Bruch $\frac{17-x}{19+x} = \frac{14}{22} = \frac{7}{11}$.

Also erfüllt genau die Zahl $z = 3$ die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 160614:

Wegen $91 - 26 = 65$ zahlten die Pioniere dieser Gruppe insgesamt genau 65 Markstücke in die Reisekasse. Also ist 65 ein Vielfaches der Anzahl der Pioniere der Gruppe. Alle natürlichen Zahlen, die 65 als Vielfaches haben, kommen in den Zerlegungen $65 = 1 \cdot 65 = 5 \cdot 13$ vor. Von diesen Zahlen ist nur 13 zugleich größer als 10 und kleiner als 50.

Entsprechend der Aufgabe müssen daher 13 Pioniere an der Fahrt teilgenommen haben, und jeder von ihnen hat genau 5 M in die Reisekasse gezahlt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission