15. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1975/1976

Aufgaben und Lösungen

15. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 151221:

a) Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, daß in der nach dem binomischen Lehrsatz gebildeten Entwicklung

$$(a+b)^n = c_0 a^n + c_1 a^{n-1} \cdot b + c_2 a^{n-2} \cdot b^2 + ... + c_n b^n \tag{1}$$

die Koeffizienten c_0, c_1, c_2 die Summe $c_0 + c_1 + c_2 = 79$ haben.

Gibt es solche Zahlen n, so ermittle man sie.

b) Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, daß aus (1) durch die Ersetzung $a = x^2$, $b = \frac{1}{x}$ eine Entwicklung

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n = c_0 x^{k_0} + c_1 x^{k_1} + c_2 x^{k_2} + ... + c_n x^{k_n}$$

entsteht, in der einer der Exponenten den Wert $k_i = 0$ hat, d.h., in der ein von x freies Glied vorkommt.

Gibt es solche Zahlen, so ermittle man sie.

b) Man ermittle alle natürlichen Zahlen n, die sowohl die in a) als auch die in b) angegebenen Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 151222:

Gegeben sei eine Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck mit dem Flächeninhalt Q ist. Zwei der Seitenflächen stehen senkrecht auf der Grundfläche; die zwei restlichen schließen mit der Grundfläche Winkel der Größe α bzw. β ein.

Man ermittle das Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von Q, α und β.

Aufgabe 151223:

Die Forschungsabteilungen zweier volkseigener Betriebe sollen zu einer gemeinsamen Beratung genau je sechs Mitarbeiter delegieren. An der Beratung sollen insgesamt 6 Mathematiker und 6 Ingenieure teilnehmen. In der Forschungsabteilung des einen Betriebes arbeiten 5 Mathematiker und 7 Ingenieure, in der des anderen 7 Mathematiker und 5 Ingenieure.

Man ermittle die Anzahl aller möglichen personellen Zusammensetzungen der Beratung unter den angegebenen Bedingungen.

Aufgabe 151224:
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die das Gleichungssystem

$$x + y + z = a \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad (2)$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \qquad (3)$$

erfüllt ist, wobei a eine reelle Zahl ist.

15. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 151321:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Lösung 151322:

Es sei $ABCDS$ eine Pyramide, deren Grundfläche $ABCD$ ein Rechteck mit dem Flächeninhalt Q ist und deren Spitze S sei. Die senkrecht auf der Grundfläche stehenden Seitenflächen haben eine Pyramidenkante gemeinsam, da sie sonst parallelen Ebenen angehören würden, was bei einer Pyramide nicht möglich ist. Diese zur Grundfläche senkrechte Pyramidenkante sei SD.

Daher sind für die zur Grundfläche nicht senkrechten Seitenflächen BCS und ABS die Neigungswinkel gleich den Winkeln $\sphericalangle SAD$ und $\sphericalangle SCD$. Außerdem ist die Länge von SD gleich der Länge h der Höhe der Pyramide.

O.B.d.A. gelte nun $\sphericalangle SAD = \alpha$, $\sphericalangle SCD = \beta$. Ferner gilt

$$h = \overline{SD} = \overline{AD} \cdot \tan\alpha \qquad (1)$$
$$= \overline{CD} \cdot \tan\beta \qquad (2)$$
$$Q = \overline{AD} \cdot \overline{CD}. \qquad (3)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich durch Multiplikation und anschließendem Einsetzen von (3) und Radizieren:

$$h^2 = \overline{AD} \cdot \overline{CD} \cdot \tan\alpha \cdot \tan\beta$$
$$h = \sqrt{Q \cdot \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Damit ergibt sich für das Volumen V der Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot Q \cdot h$$
$$= \frac{1}{3} \cdot Q \cdot \sqrt{Q \cdot \tan\alpha \cdot \tan\beta}.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (0)

Lösung 151323:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Lösung 151324:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Quellenverzeichnis

(0) Unbekannt