14. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1974/1975

Aufgaben und Lösungen

14. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 141211:

Am Ende einer größeren Abendgesellschaft zeigte es sich, daß keiner der anwesenden Herren mit weniger als 10 und keiner mit mehr als 12 Damen getanzt hatte, während keine der Damen mit weniger als 12 und auch keine mit mehr als 14 Herren zum Tanz gegangen war. Keiner der Herren hatte dieselbe Dame mehr als einmal zum Tanz geführt. Hätte jeder der Herren mit jeder Dame genau einmal getanzt, so hätten 480 Tänze stattfinden müssen. Dabei zählt jeder Tanz, den ein Herr mit einer Dame ausführt, als ein Tanz. (Wenn z.B. genau 15 Paare gleichzeitig tanzen, so soll das als 15 Tänze und nicht als 1 Tanz verstanden werden.)

a) Man ermittle alle mit diesen Bedingungen vereinbaren Möglichkeiten für die Anzahl der Damen und Herren, die insgesamt anwesend waren.

b) Man gebe (am einfachsten in der Form eines Rechteckschemas) eine der bei den gefundenen Anzahlen möglichen Zusammenstellungen zu Tanzpaaren an, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 141212:

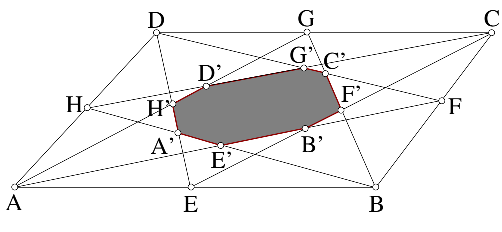
Man beweise:

Wenn die Summe zweier natürlicher Zahlen m und n durch 7 teilbar ist, so ist die Summe $m^7 + n^7$ durch 49 teilbar.

Aufgabe 141213:

In einem beliebigen Parallelogram $ABCD$ seien E, F, G, H die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD bzw. DA.

Der Schnittpunkt von DE mit HB sei A',
der von HB mit AF sei E',
der von AF mit EC sei B',
der von EC mit GB sei F',
der von GB mit FD sei C',
der von FD mit CH sei G',
der von CH mit GA sei D', und
der von GA mit DE sei H' (siehe Abbildung).



Man beweise, daß der Flächeninhalt des Achtecks $A'E'B'F'C'G'D'H'$ ein Sechstel des Flächeinhalts des Parallelogramms $ABCD$ beträgt.

Aufgabe 141214:

Für alle reellen Wertetripel $(a,\ b,\ c)$ ist zu untersuchen, ob das Gleichungssystem

$$xy^2z^3 = a, \tag{1}$$
$$x^2y^3z = b, \tag{2}$$
$$x^3yz^2 = c \tag{3}$$

1) keine,
2) genau eine,
3) genau zwei,
4) mehr als zwei, jedoch endlich viele,
5) unendlich viele

reelle Lösungen $(x,\ y,\ z)$ hat. Ferner sind sämtliche vorhandenen Lösungen anzugeben.

14. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

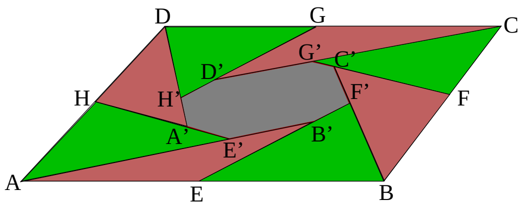
Lösung 141311:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (12)

Lösung 141312:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (12)

Lösung 141313:



Es sei definiert: $a := \overline{AB} = \overline{CD}$, $b := \overline{BC} = \overline{AD}$, h_a als Höhe des Parallelogrammes bzgl. a und analog h_b bzgl. b. Dann gilt für den Flächeinhalt des Parallelogrammes: $A_{ABCD} = a \cdot h_a = b \cdot h_b$.

Das Parallelogramm läßt sich in die grünen, roten und grauen Teilfiguren gemäß Zeichnung zerlegen. Der gesuchte Flächeninhalt der grauen Figur ist somit die Differenz zwischen der Parallelogrammfläche und der Summe aller roten und grünen Dreiecksflächen.

Weiterhin gilt: $\Delta EBF' \equiv \Delta GCF'$ ($\sphericalangle EF'B = \sphericalangle GF'C$ als Wechselwinkel, $\sphericalangle EBF' = \sphericalangle F'GC$ als Scheitelwinkel an geschnittenen Parallelen, $\overline{EB} = \overline{CG} = a/2$). Die Höhen in den beiden Dreiecken sind also gleich groß und also die Höhen bzgl. $\overline{EB}$ bzw. $\overline{CG}$ auch halb so groß wie h_a. Damit ergibt sich: $A_{EBF'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h_a}{2} = \frac{1}{8} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{8} \cdot A_{ABCD}$. Analog kann nachgewiesen werden, daß alle grünen Dreiecksflächen ein Achtel der Parallelogrammfläche einnehmen.

Im Dreieck ABC gilt: EB' liegt auf der Seitenhalbierenden von $\overline{AB}$ und AB' auf der Seitenhalbierenden von $\overline{BC}$. Da der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden in einem Dreieck selbige im Verhältnis 1:2 teilt, gilt, daß der Abstand von B' zu $\overline{AB}$ ein Drittel des Abstandes von C zu $\overline{AB}$ beträgt. Damit ist die Höhe im Dreieck AEB' bzgl. AE ein Drittel von h_a. Für den Flächeinhalt in diesem Dreieck gilt folglich: $A_{AEB'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h_a}{3} = \frac{1}{12} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{12} \cdot A_{ABCD}$. Analoges gilt für die restlichen roten Dreiecke.

Zusammenfassend erhält man für den gesuchten Flächeinhalt: $A = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{rot} - 4 \cdot A_{gruen} = A_{ABCD} - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot A_{ABCD} - 4 \cdot \frac{1}{12} \cdot A_{ABCD} = \frac{24-4\cdot3-4\cdot2}{24} \cdot A_{ABCD} = \frac{4}{24} \cdot A_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot A_{ABCD}$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

q.e.d.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Felix Kaschura

Lösung 141314:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (12)

Quellenverzeichnis

(12) Buch: Neue Mathematik-Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1990, Aulis-Verlag