



**14. Mathematik Olympiade**  
**2. Stufe (Kreisolympiade)**  
**Klasse 6**  
**Saison 1974/1975**

Aufgaben und Lösungen





14. Mathematik-Olympiade  
2. Stufe (Kreisolympiade)  
Klasse 6  
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

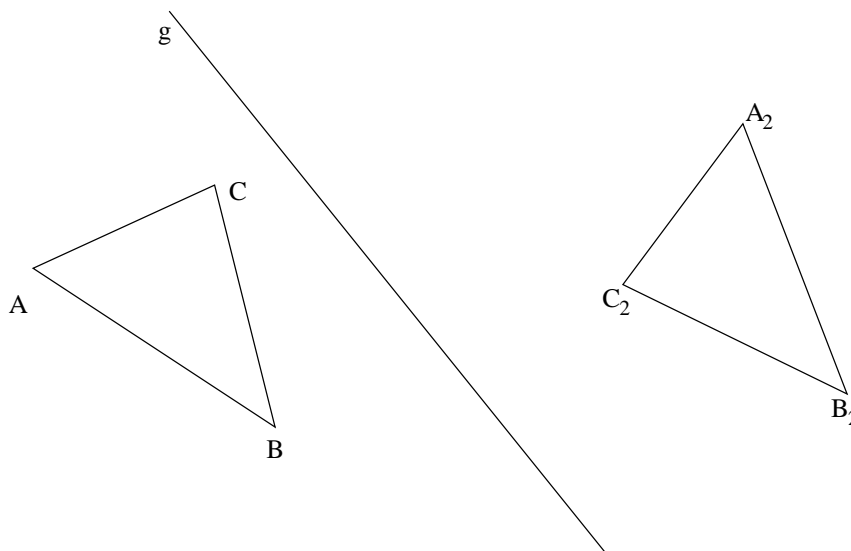
Aufgabe 140621:

Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck  $ABC$  und ein Dreieck  $A_2B_2C_2$ , ein Punkt  $P$  sowie eine Gerade  $g$  abgebildet.

Das Dreieck  $A_2B_2C_2$  ist aus dem Dreieck  $ABC$  durch folgende Konstruktionen entstanden:

Zunächst wurde  $\triangle ABC$  an  $g$  gespiegelt, wobei ein Dreieck  $A_1B_1C_1$  entstand. Danach wurde auf  $\triangle A_1B_1C_1$  eine solche Verschiebung angewendet, daß  $\triangle A_2B_2C_2$  als Bild des Dreiecks  $A_1B_1C_1$  entstand.

Konstruiere unter Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck den Verschiebungspfeil  $\overrightarrow{PQ}$  dieser auf  $\triangle A_1B_1C_1$  anzuwendenden Verschiebung. Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



Aufgabe 140622:

Klaus behauptet, eine von ihm aufgeschriebene natürliche Zahl  $z$  habe folgende Eigenschaften:

- (1) Vertauscht man zwei geeignete Ziffern von  $z$  miteinander, so ist die auf diese Weise entstehende Zahl  $z'$  um 198 größer als  $z$ .
- (2) Die Summe aus  $z$  und  $z'$  beträgt 13 776.

Stelle fest, ob es genau eine Zahl  $z$  mit den von Klaus genannten Eigenschaften gibt! Wenn dies der Fall ist, so ermittle diese Zahl!



Aufgabe 140623:

Anita, Brigitte, Christa und Dana trugen untereinander einen Wettkampf aus. Auf die Frage, wer den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz belegte, wurden folgende drei Aussagen gemacht:

- (1) Anita siegte, Brigitte belegte den zweiten Platz.
- (2) Anita belegte den zweiten Platz, Christa den dritten.
- (3) Dana belegte den zweiten, Christa den vierten Platz.

Wie sich herausstellte, wurde in jeder der drei Aussagen (1), (2), (3) eine Platzierung richtig und eine falsch angegeben.

Wer belegte den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz?

Aufgabe 140624:

Ein Radfahrer fuhr mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einer Straße von  $A$  nach  $B$ . Er startete in  $A$  um 6.00 Uhr und legte in jeder Stunde 14 km zurück. Ein zweiter Radfahrer fuhr auf derselben Straße mit gleichbleibender Geschwindigkeit von  $B$  nach  $A$ . Er startete am selben Tag um 8.00 Uhr in  $B$  und legte in jeder Stunde 21 km zurück.

Beide Radfahrer begegneten sich genau am Mittelpunkt der Strecke von  $A$  nach  $B$ .

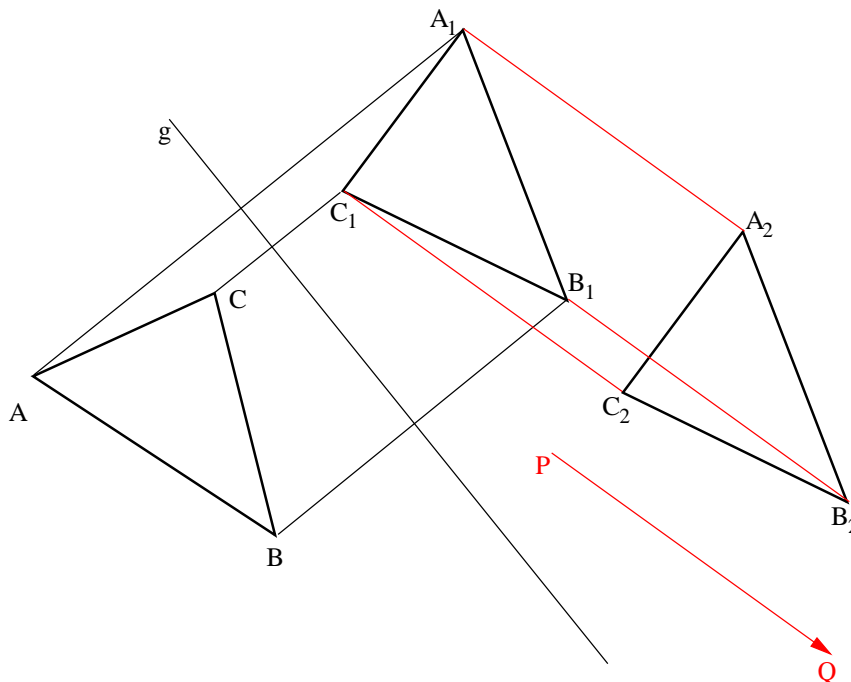
Um wieviel Uhr begegneten sie sich? Wie lang ist die Strecke von  $A$  nach  $B$ ?



14. Mathematik-Olympiade  
 2. Stufe (Kreisolympiade)  
 Klasse 6  
 Lösungen

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Lösung 140621:



Als Lösung gilt jede (einwandfreie) Zeichnung, in der für mindestens einen der Punkte  $A_1$ ,  $B_1$  bzw.  $C_1$  bei der Spiegelung an  $g$  und dann gleichsinnig parallel und gleichlang zu  $\overrightarrow{A_1A_2}$ ,  $\overrightarrow{B_1B_2}$  bzw.  $\overrightarrow{C_1C_2}$  der gesuchte Verschiebungspfeil  $\overrightarrow{PQ}$  konstruiert wurde.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

Lösung 140622:

Wenn es eine Zahl  $z$  der genannten Art gibt, so gilt für sie und die Zahl  $z'$ :

- (1)  $z' = 198 + z$  sowie
- (2)  $z + z' = 13\,776$ .



Aus (1) und (2) folgt:

$$\begin{aligned}z + 198 + z &= 13\,776, \text{ woraus man} \\2z &= 13\,776 - 198 = 13\,578, \text{ also} \\z &= 6\,789 \text{ erh\u00e4lt.}\end{aligned}$$

Also kann nur diese Zahl die genannten Eigenschaften haben. In der Tat treffen nun Klaus' Aussagen f\u00fcr diese Zahl und  $z' = 6\,789 + 198 = 6\,987$  zu, da  $z'$  aus  $z$  dadurch gewonnen werden kann, da\u00df in  $z$  die Ziffern 7 und 9 miteinander vertauscht werden.

Daher hat genau die Zahl  $z = 6\,789$  die von Klaus genannten Eigenschaften.

*Oder:* Die Summe aus  $z$  und einer um 198 gr\u00f6\u00dferen Zahl als  $z$  betr\u00e4gt laut Aufgabe 13 776. Daher ist das Doppelte der Zahl  $z$  gleich der Differenz aus 13 776 und 198, also gleich 13 578. Mithin ist  $z$  halb so gro\u00df wie 13 578 und lautet daher 6789.

Vertauscht man in dieser Zahl die Ziffern 7 und 9 miteinander, so erh\u00e4lt man mit 6987 tats\u00e4chlich eine Zahl, die um 198 gr\u00f6\u00dfer ist als  $z$ .

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

#### L\u00f6sung 140623:

Angenommen, in Aussage (1) w\u00e4re Brigittes Plazierung richtig angegeben, dann w\u00e4ren die Pl\u00e4tze von Anita in (2) und Dana in (3) falsch angegeben, und demnach m\u00fcsste Christa den dritten und zugleich den vierten Platz belegt haben, was nicht m\u00f6glich ist. Folglich ist in (1) die Plazierung von Anita richtig und die von Brigitte falsch angegeben, d.h., Anita belegte den ersten Platz und Brigitte nicht den zweiten Platz.

Danach ist in (2) der Platz Anitas falsch und der Christas richtig angegeben. Daraus folgt, da\u00df in (3) der Platz Christas falsch und der Danas richtig angegeben wurde. Mithin belegten Anita den ersten, Dana den zweiten, Christa den dritten und Brigitte den vierten Platz.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

#### L\u00f6sung 140624:

Der erste Radfahrer war um 8.00 Uhr genau zwei Stunden gefahren und hatte dabei eine Strecke von 28 km zur\u00fcckgelegt.

Von diesem Zeitpunkt an legte der zweite Radfahrer in jeder Stunde genau 7 km mehr zur\u00fcck als der erste. Da sie sich genau am Mittelpunkt der Strecke von  $A$  nach  $B$  trafen, geschah das wegen  $28 : 7 = 4$  genau 4 Stunden nach Abfahrt des zweiten Radfahrers, also um 12.00 Uhr.

Bis zu diesem Zeitpunkt hatte wegen  $6 \cdot 14 = 84$  bzw.  $4 \cdot 21 = 84$  jeder von beiden genau 84 km zur\u00fcckgelegt.

Die L\u00e4nge der Strecke von  $A$  nach  $B$  betr\u00e4gt wegen  $2 \cdot 84 = 168$  mithin 168 km.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*



---

## Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission