# 13. Mathematik Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 9
# Saison 1973/1974

Aufgaben und Lösungen

# 13. Mathematik-Olympiade
## 1. Stufe (Schulolympiade)
## Klasse 9
## Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

### Aufgabe 130911:

Zwei in gleicher Höhe über den Erdboden liegende Punkte $A$ und $B$ befinden sich in gleichem Abstand und auf derselben Seite von einer geradlinig verlaufenden hohen Wand. Die Strecke $AB$ ist 51 m lang. Ein in $A$ erzeugter Schall trifft in $B$ auf direktem Wege um genau $\frac{1}{10}$s früher ein als auf dem Wege über die Reflexion an der Wand.

Man ermittle den Abstand jedes der beiden Punkte $A$ und $B$ von der Wand, wobei angenommen sei, daß der Schall in jeder Sekunde genau 340 m zurücklegt.

### Aufgabe 130912:

Jemand will aus einer Mischung, die zu 99 % aus Wasser besteht, eine neue Mischung mit einem Wasseranteil von 98 % dadurch herstellen, daß er aus der ursprünglichen Mischung Wasser entzieht.

Man ermittle, wieviel Prozent der in der ursprünglichen Mischung enthaltenen Wassermenge er ihr zu diesem Zweck insgesamt entziehen muß.

### Aufgabe 130913:

In das nebenstehende Quadrat sollen die Zahlen 1, 2, 3 und 4 so eingetragen werden, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen jede der vier Zahlen genau einmal vorkommt. An drei Stellen sind bereits Zahlen eingetragen und sollen unverändert stehenbleiben.

Man untersuche, ob eine solche Eintragung möglich ist und ob nur eine einzige Eintragungsmöglichkeit existiert. Ist dies der Fall, so führe man die Eintragung durch.

*Hinweis:* Zur Beschreibung des Lösungsweges sind die am Rand des Quadrates eingetragenen Buchstaben zu benutzen. Beispiel: Im Feld bC ist bereits die Zahl 2 eingetragen.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 1 | | | |
| b | | | 2 | |
| c | | | | 3 |
| d | | | | |
| | A | B | C | D |

### Aufgabe 130914:

Unter $n!$ (gelesen $n$-Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis $n$; d.h., es gilt

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Man ermittle für $n = 1\,000$ die Anzahl der Nullen, auf die die Zahl $n!$ endigt (Endnullen).

# 13. Mathematik-Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 9
# Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 130911:

Nach dem Reflexionsgesetz ist der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel. Es Sei $C$ der Punkt an der Wand, in dem der von $A$ kommende Schall nach $B$ reflektiert wird. Dann ist wegen der erwähnten Winkelgleichheit und wegen der Gleichheit der Abstände der Punkte $A$ und $B$ von der Wand das Dreieck $\Delta ABC$ gleichschenklig mit $|AB| = |CB|$. Da der Schall auf dem Wege von $A$ über $C$ nach $B$ genau $\frac{1}{10}$s länger braucht als auf direktem Wege und da laut Aufgabe der Schall in jeder Zehntelsekunde 34m zurücklegt, gilt

$$|AC| + |CB| = |AB| + 34m = 51m + 34m = 85m,$$

also

$$|AC| = |CB| = 42,5m.$$

Der Abstand des Punktes $A$ von der Wand beträgt somit nach dem Satz des Pythagoras

$$\sqrt{42,5^2 - 25,5^2}m = 34m.$$

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)*

Lösung 130912:

Die ursprüngliche Mischung besteht am Anfang aus Wasser ($w_1$) und einem anderen Stoff ($y$). Die Gesamtmenge sei $m_1$, so daß sich folgende Gleichung aufstellen läßt: $m_1 = y + w_1$ (1), wobei der 99-prozentige Wasseranteil wie folgt einfließt: $w_1 = 0,99 \cdot m_1$ (2).

Für den Zustand nach dem Wasserentzug gilt für die veränderte Gesamtmenge $m_2$ bei konstantem Stoff $y$: $m_2 = y + w_2$ (3), wobei auch hier eine Aussage zum Wasseranteil getroffen wird: $w_2 = 0,98 \cdot m_2$ (4).

Gesucht wird der Anteil der entzogenen Wassermenge ($x_1 - x_2$) an der ursprünglichen Wassermenge ($x_1$) in Prozent. Dazu werden nun die Gleichungen (1) bis (4) genutzt. Zunächst werden (1) und (3) nach $y$ umgestellt und gleichgesetzt und anschließend (2) und (4) genutzt: $y = m_1 - w_1 = m_2 - w_2 \Rightarrow m_1 - 0,99 \cdot m_1 = m_2 - 0,98 \cdot m_2 \Rightarrow 0,01 \cdot m_1 = 0,02 \cdot m_2$ bzw. $m_1 = 2 \cdot m_2$. Nun kann der gesuchte Anteil errechnet werden:

$$\begin{aligned}\frac{x_1 - x_2}{x_1} &= \frac{0,99 \cdot m_1 - 0,98 \cdot m_2}{0,99 \cdot m_1} \\ &= \frac{1,98 \cdot m_2 - 0,98 \cdot m_2}{1,98 \cdot m_2} \\ &= \frac{m_2}{1,98 \cdot m_2} \\ &= \frac{1}{1,98} \approx 0,51\end{aligned}$$

Der entzogene Anteil Wasser an der ursprünglichen Wassermenge beträgt also etwa 51%.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Thomas Kugel*

Lösung 130913:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $b$ | 0 | 0 | 2 | 0 |
| $c$ | 0 | 0 | 0 | 3 |
| $d$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |

Für die Zahl 2 kommt in Reihe $a$ nur das Feld $Ba$ in Frage, da $Ca$ wegen Spalte und $Da$ wegen Diagonale nicht 2 sein kann. Dann muss die Zahl 3 in das Kästchen $Ca$, weil sie nicht in $Ba = 2$ und $Da$ (Spalte) stehen kann. Die 4 kommt dann in $Da$. Das sieht so aus:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $b$ | 0 | 0 | 2 | 0 |
| $c$ | 0 | 0 | 0 | 3 |
| $d$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |

Es folgt (eindeutig) $Dd = 2$ ($Dd$ kann nicht 1 wegen Diagonale und 3 bzw. 4 wegen Spalte sein). $Db$ wird 1 (Spalte). Außerdem folgt $Ad = 3$ ($Ad \neq 1$ wegen Spalte, $Ad \neq 2$ wegen Zeile, $Ad \neq 4$ wegen Diagonale) und $Bc = 1$ (Diagonale). Das sieht dann so aus:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $b$ | 0 | 0 | 2 | 1 |
| $c$ | 0 | 1 | 0 | 3 |
| $d$ | 3 | 0 | 0 | 2 |
| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |

Weiterhin muss $Ab = 4$ ($Ab \neq 1$, $Ab \neq 3$ wegen Spalte; $Ab \neq 2$ wegen Zeile) und $Ac = 2$ (Spalte) gelten. Entsprechend folgt $Bb = 3$ (Zeile) und $Bd = 4$ (Spalte). Dann gilt aber auch $Cc = 4$ (Zeile) und $Cd = 1$ (Spalte). Die vollständige und eindeutige Lösung sieht dann so aus:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $b$ | 4 | 3 | 2 | 1 |
| $c$ | 2 | 1 | 4 | 3 |
| $d$ | 3 | 4 | 1 | 2 |
| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |

Es existieren übrigens ganze 48 Möglichkeiten, ein $4 \times 4$ Quadrat mit den genannten Eigenschaften (ohne die Vorbelegung) zu konstruieren.

*Aufgeschrieben und gelöst von Daniel Gutekunst*

Lösung 130914:

Es sei $x$ die gesuchte Anzahl der Endnullen der Zahl 1000!. Dann gilt $1000! = z \cdot 10^x$, wobei $z$ eine natürliche Zahl ist, die nicht auf 0 endet. Wegen $10^x = 2^x \cdot 5^x$ ist die Anzahl der Endnullen gleich der kleineren unter den Anzahlen der Faktoren 2 bzw. 5, die in der Zahl 1000! enthalten sind. Da jede zweite natürliche Zahl gerade, aber nur jede fünfte natürliche Zahl durch 5 teilbar ist, enthält die Zahl 1000! mehr Faktoren 2 als Faktoren 5. Mithin ist die gesuchte Anzahl der Endnullen gleich der Anzahl der Faktoren 5, die 1000! enthält.

Nun gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 genau eine durch $625 = 5^4$ teilbare Zahl, unter den restlichen 999 Zahlen genau 8-1 durch $125 = 5^3$ teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 125$ mit $1 \leq n \leq 8$ und $n \neq 5$; unter den übrigen 992 Zahlen genau 40 - 8 durch $25 = 5^2$ teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 25$ mit $1 \leq n \leq 40$ mit $n \neq 5, 10, 15, ..., 40$, d.h. $n \neq k \cdot 5 (k = 1, ..., 8)$; schließlich unter den verbleibenden 960 Zahlen genau $200 - 40$ durch 5 teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 5$ mit $1 \leq n \leq 200$ und $n \neq k \cdot 5 (k = 1, ..., 40)$. Daher enthält die Zahl 1000! wegen

$$4 + 3(8 - 1) + 2(40 - 8) + (200 - 40) = 200 + 40 + 8 + 1 = 249$$

genau 249 Faktoren 5 und endet somit auf genau 249 Nullen.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)*

## Quellenverzeichnis

**(12)** Buch: Neue Mathematik-Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1990, Aulis-Verlag