13. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1973/1974

Aufgaben und Lösungen

13. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 130731:

Über die Altersangaben (in vollen Lebensjahren) einer Familie (Vater, Mutter und zwei Kinder) ist folgendes bekannt:

(1) Die Summe aller vier Lebensalter beträgt 124.

(2) Vater und Mutter sind zusamment dreimal so alt wie ihre beiden Kinder zusammen.

(3) Die Mutter ist mehr als doppelt so alt wie das älteste der beiden Kinder.

(4) Die Differenz, die sich ergibt, wenn man das Lebensalter der Mutter von dem des Vaters subtrahiert, ist neunmal so groß wie die Differenz, die sich ergibt, wenn man das Lebensalter des jüngeren Kindes von dem des älteren Kindes subtrahiert.

Wie alt ist jedes der vier Familienmitglieder?

Aufgabe 130732:

Zeige, daß für jede Primzahl $p \geq 3$ das Produkt $(p+1)\,p\,(p-1)$ durch 24 teilbar ist!

Aufgabe 130733:

Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus $a - c = 3\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $d = 6\,\text{cm}$, $e = 9\,\text{cm}$! Dabei bedeuten a, b, c und d in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten AB, BC, CD, DA und e die Länge der Diagonalen AC.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Trapez bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 130734:

Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen a, die gleich der Hälfte der Summe derjenigen beiden Zahlen sind, die durch zyklische Vertauschung der Ziffern von a entstehen!

Hinweis: Wird die Zahl a durch die Ziffernfolge uvw dargestellt, so entstehen durch zyklische Vertauschung die Zahlen vwu und wuv. Dabei sollen auch Möglichkeiten mit $v = 0$ oder $w = 0$ zugelassen werden; die durch zyklische Vertauschung entstehenden Zahlen brauchen also nicht dreistellig zu sein.

Aufgabe 130735:

Gegeben sei ein Dreieck ABC; der Schnittpunkt seiner Winkelhalbierenden sei W. Die Parallele durch W zu BC schneide AC in M und AB in N.

Beweise: $\overline{CM} + \overline{BN} = \overline{MN}$!

Aufgabe 130736:

Ein mit konstanter Geschwindigkeit fahrender Zug fuhr über eine 225 m lange Brücke in genau 27 s (gerechnet von der Auffahrt der Lok auf die Brücke bis zur Abfahrt des letzten Wagens von der Brücke).

An einem Fußgänger, der entgegen der Fahrtrichtung des genannten Zuges ging, fuhr dieser in genau 9 s vorüber. In dieser Zeit hatte der Fußgänger genau 9 m zurückgelegt.

Ermittle die Länge des Zuges (in Meter) und seine Geschwindigkeit (in Kilometer je Stunde)!

13. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 130731:

Wegen (1) und (2) ist die vierfache Alterssumme beider Kinder gleich 124; die Kinder sind deshalb zusammen 31 Jahre, die Eltern zusammen 93 Jahre alt.

Da die Lebensalter der vier Personen in ganzen Jahren angegeben werden und da 31 eine ungerade Zahl ist, so ist von den Altersangaben der Kinder die eine gerade, die andere ungerade. Daher ist die Differenz der Lebensalter der beiden Kinder eine ungerade Zahl.

Betrüge sie 3 oder mehr Jahre, so wäre sie bei den Eltern 27 oder mehr Jahre. Dann wäre das eine Kind 17 Jahre oder älter, das andere Kind 14 Jahre oder jünger, die Mutter 33 Jahre oder jünger und der Vater 60 Jahre oder älter.

Wegen $2 \cdot 17 > 33$ und (3) entfällt diese Möglichkeit. Somit beträgt die Differenz bei den Kindern 1 Jahr, bei den Eltern also 9 Jahre. Daraus folgt:

Der Vater ist 51 Jahre, die Mutter 42 Jahre, das älteste Kind 16 und das andere 15 Jahre alt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 130732:

Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $p-1$, p, $p+1$ ist stets eine durch 3 teilbar.

Wegen $p \geq 3$ ist die Primzahl p ungerade. Folglich sind $p-1$ und $p+1$ unmittelbar aufeinanderfolgende gerade Zahlen. Da von zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden geraden Zahlen stets eine durch 4 teilbar ist, ist von den Zahlen $p-1$ und $p+1$ eine durch 2 und die andere durch 4 teilbar.

Somit ist $(p-1)\,p\,(p+1)$ durch 3 und durch 8, also, da 3 und 8 teilerfremd sind, auch durch 24 teilbar. □

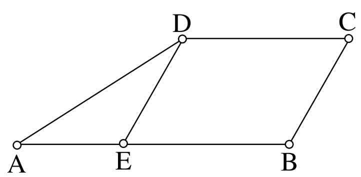
Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 130733:

(I) Angenommen, $ABCD$ sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Punkt E liege zwischen A und B auf AB, und es gelte $\overline{AE} = a - c$.

Dann ist $\overline{AB} - \overline{CD} = c$ und $EBCD$ ist ein Parallelogramm. Nun läßt sich ΔAED aus $\overline{AE}$, $\overline{ED}$ $(= \overline{BC})$ und $\overline{DA}$ konstruieren. Punkt C liegt erstens auf der Parallelen durch D zu AE und zweitens auf dem Kreis um A mit dem Radius e.



Ferner liegt C auf derselben Seite der Geraden durch A und D wie E. Punkt P liegt erstens auf dem Strahl aus A durch E und zweitens auf der Parallelen durch C zu ED.

(II) Daher entspricht ein Trapez $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren ein Dreieck AED aus $\overline{AE} = 3$ cm, $\overline{ED} = 4$ cm und $\overline{AD} = 6$ cm.

(2) Wir ziehen durch D die Parallele zu AE.

(3) Wir schlagen um A mit dem Radius e einen Kreis. Schneidet er die in (2) gezogene Parallele in einem Punkte, der auf derselben Seite der Geraden durch A und D liegt wie E, so sei dieser C genannt.

(4) Wir zeichnen den Strahl aus A durch E.

(5) Wir ziehen durch C die Parallele zu ED. Schneidet sie den in (4) gezeichneten Strahl, so sei dieser Schnittpunkt B genannt.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Trapez $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe genügt:

Nach Konstruktion ist $\overline{AD} = d$. Weiter ist nach Konstruktion $\overline{AC} = e$. Da $EBCD$ nach Konstruktion ein Parallelogramm ist, gilt schließlich $\overline{BC}(= \overline{ED}) = b$ und, da E zwischen A und B liegt, auch $\overline{AB} - \overline{DC}(= \overline{AB} - \overline{EB} = \overline{AE}) = a - c$.

(IV) Mit den gegebenen Größen ist Konstruktionsschritt (1) bis auf Kongruenz nach dem Kriterium (s,s,s) eindeutig ausführbar.

Ebenso ist (2) eindeutig ausführbar. Konstruktionsschritt (3) liefert wegen $\overline{AC} > \overline{AD}$ zwei Schnittpunkte, von denen genau einer auf derselben Seite von AD liegt wie E. Schließlich sind auch (4) und (5) eindeutig ausführbar.

Daher ist ein Trapez $ABCD$ durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 130734:

Angenommen, eine Zahl mit der Ziffernfolge xyz entspreche den Bedingungen der Aufgabe. Dann ist

$a = 100x + 10y + z$ gleich der Hälfte der Summe von

$b = 100y + 10z + x$ und

$c = 100z + 10x + y$. Demnach gilt:

$200x + 20y + 2z = 2a = b + c = 101y + 110z + 11x$, also $189x = 81y + 108z$ und daher

$$7x = 3y + 4z. \qquad (1)$$

Folglich ist 7 ein Teiler von $3y + 4z$ und daher auch von $3y + 4z - 7z = 3(y - z)$, also von $y - z$.

Wegen $0 \leq y \leq 9$, $0 \leq z \leq 9$ folgt hieraus, daß entweder $y = z$ und nach (1) dann $y = z = x \geq 1$ gilt oder z um 7 größer ist als y.

Daher verbleiben für y und z nur die in der folgenden Tabelle genannten Möglichkeiten, zu denen jedesmal wegen (1) nur das angegebene x gehört:

x	y	z
1	1	1
2	2	2
...	...	...
9	9	9

x	y	z
8	1	4
7	0	3
0	7	4
1	8	5
2	9	6
9	2	5

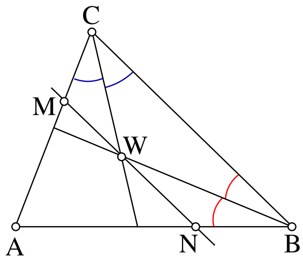
Daher können höchstens die Zahlen 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999, 592, 481, 370, 407, 518, 629 Lösungen sein. Für 111, ..., 999 ist dies unmittelbar klar; ferner gilt

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\cdot(925+259) &= 1\,184:2 = 529\\
\tfrac{1}{2}\cdot(814+148) &= 962:2 = 481\\
\tfrac{1}{2}\cdot(703+37) &= 740:2 = 370\\
\tfrac{1}{2}\cdot(74+740) &= 814:2 = 407\\
\tfrac{1}{2}\cdot(185+851) &= 1\,036:2 = 518\\
\tfrac{1}{2}\cdot(296+962) &= 1\,258:2 = 629
\end{aligned}$$

Also erfüllt jede dieser 15 Zahlen die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 130735:



Aus $\overline{\sphericalangle CBW} = \overline{\sphericalangle WBN}$ (laut Voraussetzung) und $\overline{\sphericalangle CBW} = \overline{\sphericalangle NBW}$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) folgt $\overline{\sphericalangle WBN} = \overline{\sphericalangle NWB}$.

Deshalb ist das Dreieck BNW gleichschenklig mit der Spitze N, und es gilt

$$\overline{BN} = \overline{NW}. \tag{1}$$

Analog beweist man

$$\overline{CM} = \overline{MW}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $\overline{CM} + \overline{BN} = \overline{MW} + \overline{NW}$, also $\overline{CM} + \overline{BN} = \overline{MN}$. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 130736:

Man könnte sich vorstellen, daß der Fußgänger im selben Augenblick die Brücke (entgegengesetzt zur Fahrtrichtung des Zuges) verläßt, in dem die Lok auf die Brücke fährt. Wenn der Fußgänger nach 9 sec 9 m zurückgelegt hat, fährt der letzte Wagen des Zuges an ihm vorbei. Bis zum Verlassen der Brücke benötigt dieser Wagen wegen $27-9=18$ noch 18 sec. In dieser Zeit legt er wegen $225+9=234$ genau 234 m zurück.

Folglich betrug wegen $234:18=13$ die Durchschnittsgeschwindigkeit des Zuges 13 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ das sind wegen $13\cdot\frac{3\,600}{1\,000}=46,8$ genau $46,8\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Da der Zug zur Brückenfahrt 27 sec benötigte, legte die Lok wegen $13\cdot 27=351$ in dieser Zeit 351 m zurück. Diese Strecke setzt sich aus den 225 m Länge der Brücke und der Länge des Zuges zusammen.

Wegen $352-225=126$ hat der Zug mithin eine Länge von 126 m.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.