13. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1973/1974

Aufgaben und Lösungen

13. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 130721:

Die 36 Schüler einer 7. Klasse nehmen am außerunterrichtlichen Sport teil, und zwar jeder in genau einer der Sektionen Leichtathletik, Tischtennis, Schwimmen, Judo und Schach. Über die Teilnahme der Schüler dieser Klasse an diesen Sektionen ist weiter bekannt:

(1) Mehr als die Hälfte betreibt Leichtathletik.

(2) Es gehören mehr der Sektion Schwimmen als der Sektion Tischtennis an.

(3) Die Summe aus der Anzahl der Mitglieder der Sektion Schach und der Sektion Judo beträgt genau ein Neuntel aller Schüler.

(4) In der Sektion Tischtennis befinden sich doppelt so viele Schüler wie in der Sektion Schach.

(5) Die Anzahl der Sektionsmitglieder Schach ist größer als das Doppelte, jedoch kleiner als das Vierfache der Anzahl der Sektionsmitglieder Judo.

Ermittle für jede der genannten Sektionen die Anzahl der Schüler der erwähnten Klasse, die Mitglieder dieser Sektion sind!

Aufgabe 130722:

Karl sucht drei von Null verschiedene natürliche Zahlen a, b, c, für die folgendes gilt:

$(a, b) = 4$ (lies: Der ggT der Zahlen a und b ist 4),
$(a, c) = 6$,
$(b, c) = 14$.

Er behauptet nach einigem Probieren, daß es sogar mehr als eine Möglichkeit gibt, drei solche Zahlen anzugeben.

Ist diese Behauptung richtig?

Gibt es eine Möglichkeit der Wahl dreier solcher Zahlen a, b, c, bei der, verglichen mit allen übrigen Möglichkeiten, a am kleinsten und zugleich b am kleinsten und zugleich c am kleinsten ist? Wenn ja, dann gib für diesen Fall die Zahlen a, b, c an!

Aufgabe 130723:

Gegeben sei ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S und der Größe α ($0° < \alpha < 180°$). Beweise folgenden Satz:

Schneidet eine Gerade g den einen und eine andere Gerade h den anderen Schenkel des gegebenen Winkels jeweils unter einem Winkel von 90°, jedoch nicht in S, so hat einer der von g und h gebildeten Schnittwinkel die Größe α. (Fallunterscheidung)

Aufgabe 130724:

Es sei ΔABC ein Dreieck, in dem die Größe γ des Innenwinkels BCA kleiner ist als jede der Größen der beiden anderen Innenwinkel.

Konstruiere alle Punkte P auf den Seiten AC und BC, so daß $\overline{\sphericalangle BPA} = 2\gamma$ gilt!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion; ermittle die Anzahl der Punkte P mit der verlangten Eigenschaft!

13. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 130721:

Aus (3) folgt, daß die Summe aus der Anzahl der Schachspieler und der Anzahl der Judosportler 4 beträgt. Von allen möglichen Zerlegungen der Zahl 4 in zwei ganzzahlige Summanden erfüllt nur diejenige (5), nach der die Anzahl der Schachspieler 3 und die der Judosportler 1 ist.

Daraus folgt nach (4), daß genau 6 Schüler Mitglied der Sektion Tischtennis sind.

Nach (1) betreiben mindestens 19 Schüler Leichtathletik und nach (2) mindestens 7 Schüler Schwimmen. Da für diese beiden Sportarten nur noch genau 26 Schüler in Betracht kommen, sind 19 und 7 die einzig möglichen Anzahlen.

Von den 36 Schülern betreiben mithin genau 19 Leichtathletik, genau 7 Schwimmen, genau 6 Tischtennis, genau 3 Schach, und genau 1 Schüler betreibt Judo.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 130722:

Erfüllen a, b, c die drei genannten Bedingungen über den ggT, so ist a durch 4 und durch 6, also durch das kgV dieser Zahlen, d.h. durch 12, teilbar.

Ferner ist dann b durch 4 und durch 14, also durch das kgV dieser Zahlen, d.h. durch 28, teilbar.

Ebenso ist c durch 6 und 14, also durch 42 teilbar.

Andererseits erfüllt die Wahl von (1) $a = 12$, $b = 28$, $c = 42$ alle drei ggT-Bedingungen. Daher ist die zweite Frage der Aufgabe mit Ja und der Angabe (1) zu beantworten.

Multipliziert man a in (1) mit einer zu b und c teilerfremden Zahl $z > 1$ (z.B. mit $z = 5$), so erhält man eine andere Wahl dreier Zahlen (im Beispiel 60, 28, 42), die ebenfalls alle drei ggT-Bedingungen erfüllt. Daher ist auch die erste Frage der Aufgabe mit Ja zu beantworten.

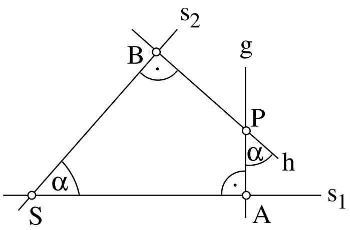
Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 130723:

Es sei A der Schnittpunkt von g mit dem einen Schenkel s_1 des gegebenen Winkels, und es sei B der Schnittpunkt von h mit dem anderen Schenkel s_2 des gegebenen Winkels, derart, daß sich g, s_1 in A und ebenso h, s_2 in B jeweils unter 90° schneiden.

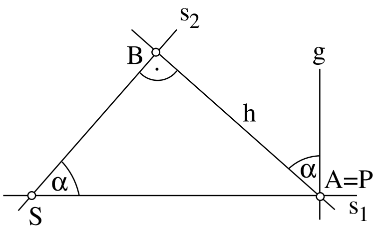
Dann ist $g \nparallel h$. Folglich existiert ein Schnittpunkt P von g und h. Nun unterscheiden wir folgende Fälle:

Fall 1: P liegt innerhalb des gegebenen Winkels.



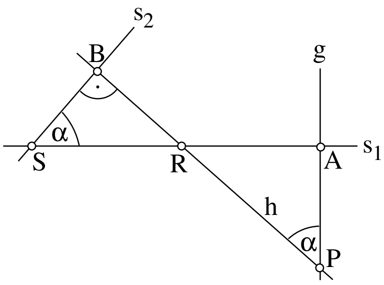
Dann ist $SAPB$ ein konvexes Viereck. Folglich gilt nach dem Satz über die Winkelsumme im Viereck sowie wegen $\overline{\sphericalangle SBP} = \overline{\sphericalangle SAP} = 90°$; $\overline{\sphericalangle BPA} = 180° - \overline{\sphericalangle ASB} = 180° - \alpha$, und demnach hat jeder seiner Nebenwinkel, also einer der Schnittwinkel von g und h, die Größe α.

Fall 2: P fällt mit einem der Punkte A, B zusammen, etwa mit A.



Dann wird der rechte Winkel, den g mit s_1, bildet, durch h in zwei Winkel zerlegt, deren einer die Größe $\overline{\sphericalangle SAB} = 180° - \alpha$ hat (nach dem Winkelsummensatz im Dreieck). Folglich hat der andere, der einer der Schnittwinkel von g mit h ist, die Größe α.

Fall 3: P liegt außerhalb des gegebenen Winkels.



O.B.d.A. liege P nicht auf derselben Seite von s_1 wie B. Der Schnittpunkt von h mit s_1 sei R. Dann gilt: $\overline{\sphericalangle SRB} = 180° - \alpha$ (Winkelsummensatz im Dreieck) sowie $\overline{\sphericalangle SRB} = \overline{\sphericalangle PRA}$ (Scheitelwinkel) und damit $\overline{\sphericalangle RPA} = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$.

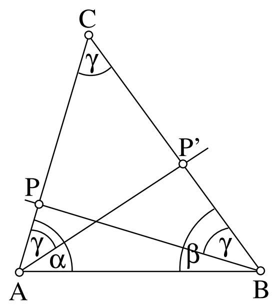
Da es keine weiteren Fälle gibt, ist der Satz damit bewiesen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 130724:

(I) Angenommen, ein Punkt P auf AC habe die verlangte Eigenschaft. Nach dem Außenwinkelsatz für ΔBCP folgt dann

$$\overline{\sphericalangle CBP} = \overline{\sphericalangle BPA} - \overline{\sphericalangle BCP} = \gamma.$$



(II) Daher entspricht ein Punkt P auf AC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man trägt in B an BC nach der Seite der Geraden durch B und C, auf der A liegt, den Winkel der Größe γ an.

(2) Schneidet sein freier Schenkel die Seite AC, so sei P der Schnittpunkt.

(III) Beweis, daß jeder so konstruierte Punkt P den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion (2) liegt P auf AC. Ferner ist nach dem Außenwinkelsatz und nach Konstruktion (1) auch $\overline{\sphericalangle BPA} = \overline{\sphericalangle BCP} + \overline{\sphericalangle CBP} = 2\gamma$.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist stets eindeutig ausführbar. Wegen $\gamma < \beta$ hat der freie Schenkel des in (1) konstruierten Winkels gemeinsame Punkte mit dem Innern des Dreiecks ABC und schneidet die Seite AC zwischen A und C;

Konstruktionsschritt (2) ergibt folglich genau einen Punkt P auf AC, der die verlangte Eigenschaft hat. Vertauscht man in den Überlegungen (I) bis (IV) überall A mit B, so erhält man: Es gibt genau einen (weiteren) Punkt P' auf BC, der die verlangte Eigenschaft hat. Somit gibt es stets genau 2 derartige Punkte.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.