13. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1973/1974

Aufgaben und Lösungen

13. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 130711:
Gib sämtliche Teiler der Zahl 111 111 an!

Aufgabe 130712:
Beweise den folgenden Satz:

Ist $ABCD$ ein Rhombus und sind E, F, G, H in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA, so ist das Viereck $EFGH$ ein Rechteck!

Aufgabe 130713:
Der Umfang u eines gleichschenkligen Dreiecks soll 24 cm betragen; eine der Seiten dieses Dreiecks soll $2\frac{1}{2}$ mal so lang sein wie eine andere seiner Seiten.

Untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, die Seitenlängen eines Dreiecks so anzugeben, daß diese Bedingungen erfüllt sind! Untersuche, ob es genau eine solche Möglichkeit gibt! Wenn dies der Fall ist, so ermittle die zugehörigen Seitenlängen!

Aufgabe 130714:
An einer Kreisolympiade Junger Mathematiker nahmen in der Olympiadeklasse 7 Anneliese, Bertram, Christiane, Detlev, Erich und Franziska teil. Genau zwei von ihnen erhielten Preise. Auf die Frage, welche beiden Teilnehmer das waren, wurden folgende fünf Antworten gegeben:

(1) Anneliese und Christiane

(2) Bertram und Franziska

(3) Anneliese und Franziska

(4) Bertram und Erich

(5) Anneliese und Detlev.

Wie sich später herausstellte, waren in genau einer Antwort beide Namen falsch angegeben, während in jeder der übrigen vier Antworten genau ein Name richtig angegeben war.

Wie heißen die beiden Preisträger?

13. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

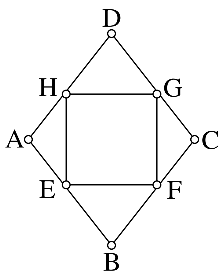
Lösung 130711:

Wegen $111\,111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ hat $111\,111$ genau die 32 Teiler 1, 3, 7, 11, 13, 37 und

$3 \cdot 7 = 21$	$13 \cdot 37 = 481$	$7 \cdot 13 \cdot 37 = 3\,367$
$3 \cdot 11 = 33$	$3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$	$11 \cdot 13 \cdot 37 = 5\,291$
$3 \cdot 13 = 39$	$3 \cdot 7 \cdot 13 = 273$	$3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 3\,003$
$3 \cdot 37 = 111$	$3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$	$3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37 = 8\,547$
$7 \cdot 11 = 77$	$3 \cdot 11 \cdot 13 = 429$	$3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 = 10\,101$
$7 \cdot 13 = 91$	$3 \cdot 11 \cdot 37 = 1\,221$	$3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 15\,873$
$7 \cdot 37 = 259$	$3 \cdot 13 \cdot 37 = 1\,443$	$7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 37\,037$
$11 \cdot 13 = 143$	$7 \cdot 11 \cdot 13 = 1\,001$	$3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 111\,111$
$11 \cdot 37 = 407$	$7 \cdot 11 \cdot 37 = 2\,849$	

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 130712:



In dem Rhombus $ABCD$ gilt, da E, F, G, H die Mittelpunkte seiner Seiten sind: $\overline{AE} = \overline{EB} = \overline{BF} = \overline{FC} = \overline{CG} = \overline{GD} = \overline{DH} = \overline{HA}$ (1)

Ferner gilt: $\overline{\sphericalangle HAE} = \overline{\sphericalangle FCG}$ sowie $\overline{\sphericalangle EBF} = \overline{\sphericalangle GDH}$ (2)

Aus (1) und (2) folgt $\Delta HAE \cong \Delta FCG$ sowie $\Delta EBF \cong \Delta GDH$ (sws) (3)

Aus (3) folgt $\overline{EH} = \overline{FG}$ sowie $\overline{EF} = \overline{HG}$, daher ist $EFGH$ ein Parallelogramm.

Nun gilt $\overline{\sphericalangle EAH} + \overline{\sphericalangle HDG} = 180°$ sowie $\overline{\sphericalangle AEH} = \overline{\sphericalangle AHE} = \frac{1}{2}(180° - \overline{\sphericalangle EAH})$ und $\overline{\sphericalangle DGH} = \overline{\sphericalangle DHG} = \frac{1}{2}(180° - \overline{\sphericalangle HDG})$

Folglich gilt $\overline{\sphericalangle AHE} + \overline{\sphericalangle DGH} = \frac{1}{2}(360° - 180°) = 90°$ und somit $\overline{\sphericalangle EHG} = 180° - 90° = 90°$; daher ist $EFGH$ ein Rechteck. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 130713:

Wenn die Länge c der Basis und die Länge a eines Schenkels eines gleichschenkligen Dreiecks die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, so ist $c = \frac{5}{2}a$ oder $a = \frac{5}{2}c$. Wäre $c = \frac{5}{2}a$, so wäre $a + a < \frac{5}{2}a - c$, im Widerspruch zur Dreiecksungleichung. Wenn $a = \frac{5}{2}c$ ist, so folgt $\frac{5}{2}c + \frac{5}{2}c + c = 24$ cm, also $6c = 24$ cm, woraus man $c = 4$ cm und $a = 10$ cm erhält.

Daher können nur $a = 10$ cm und $c = 4$ cm die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Sie genügen ihnen tatsächlich, da sie die Dreiecksungleichungen 10 cm < 10 cm + 4 cm, 4 cm < 10 cm + 10 cm sowie die übrigen Bedingungen 10 cm + 10 cm + 4 cm = 24 cm und 10 cm = $\left(2\frac{1}{2}\right) \cdot 4$ cm erfüllen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 130714:

Angenommen, Anneliese hätte keinen Preis erhalten. Dann wären, da laut Aufgabe in zwei der Antworten (1), (3), (5) je ein Name richtig wäre, zwei der Teilnehmer Christiane, Franziska, Detlev die Preisträger. Hiernach waren aber in der Aussage (4) und außerdem noch in einer der Aussagen (1), (3), (5) beide Angaben falsch, im Widerspruch zur Aufgabe.

Folglich ist Anneliese eine Preisträgerin. Dann sind laut Aufgabe Christiane, Franziska und Detlev keine Preisträger.

Da von den Aussagen (2), (4) genau eine zwei falsche Namen enthalten muß und Bertram in beiden Aussagen vorkommt, ist Erich der andere Preisträger.

Also sind Anneliese und Erich die beiden Preisträger.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.