



13. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 5
Saison 1973/1974

Aufgaben und Lösungen





13. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 130521:

Eine Fischereigenossenschaft hatte an einem Tage nur Hechte, Barsche und Plötzen gefangen. Davon waren insgesamt 125 Plötzen. Ferner waren es doppelt soviel Barsche wie Hechte; die Anzahl der Hechte betrug ein Fünftel der Anzahl der Plötzen.

Stelle fest, wieviel Fische die Fischereigenossenschaft an diesem Tage insgesamt gefangen hatte!

Aufgabe 130522:

Zeichne zwei Geraden g_1 und g_2 , die einander in einem Punkte S schneiden! Wähle einen Punkt T , der auf keiner der beiden Geraden liegt! Konstruiere die bei der Verschiebung ST entstehenden Bilder g'_1 und g'_2 der beiden Geraden!

Aufgabe 130523:

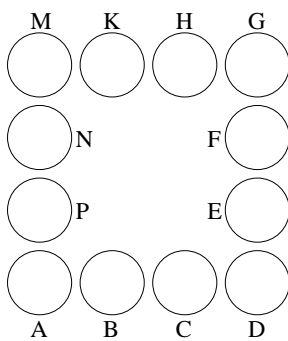


Abb. A 523

In die 12 Felder $A, B, C, D, E, F, G, H, K, M, N, P$ der nebenstehenden Figur (Abb. A 523) sollen die natürlichen Zahlen von 1 bis 12, jede genau in eines der Felder, so eingetragen werden, daß die Summe der in den Feldern A, B, C, D stehenden Zahlen 22 beträgt, ebenso die Summe der in den Feldern D, E, F, G stehenden Zahlen, gleichfalls die Summe der in den Feldern G, H, K, M stehenden Zahlen und auch die Summe der in den Feldern M, N, P, A stehenden Zahlen.

- Gib eine derartige Eintragung von Zahlen an!
- Untersuche, welche Zahlen bei jeder derartigen Eintragung in den Feldern A, D, G und M stehen!

Aufgabe 130524:

Im Centrum-Warenhaus sind zu Dekorationszwecken gleichgroße Konservbüchsen zu einer "Pyramide" aufgeschichtet worden. In jeder Schicht sind die Büchsen so "im Dreieck" angeordnet, wie Abb. A 524 zeigt. Die dort mit k bezeichnete Anzahl der Büchsen längs einer jeden "Seitenkante des Dreiecks" beträgt für die unterste Schicht 9. In jeder weiteren Schicht ist die entsprechende Anzahl k um 1 kleiner als in der unmittelbar darunterliegenden Schicht. Die oberste Schicht besteht aus einer Büchse.

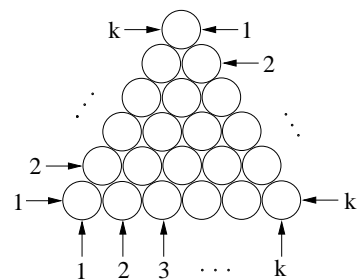
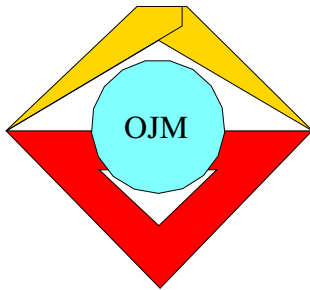


Abb. A 524

Ermittle die Anzahl aller in der "Pyramide" enthaltenen Büchsen!



13. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 5
Lösungen

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Lösung 130521:

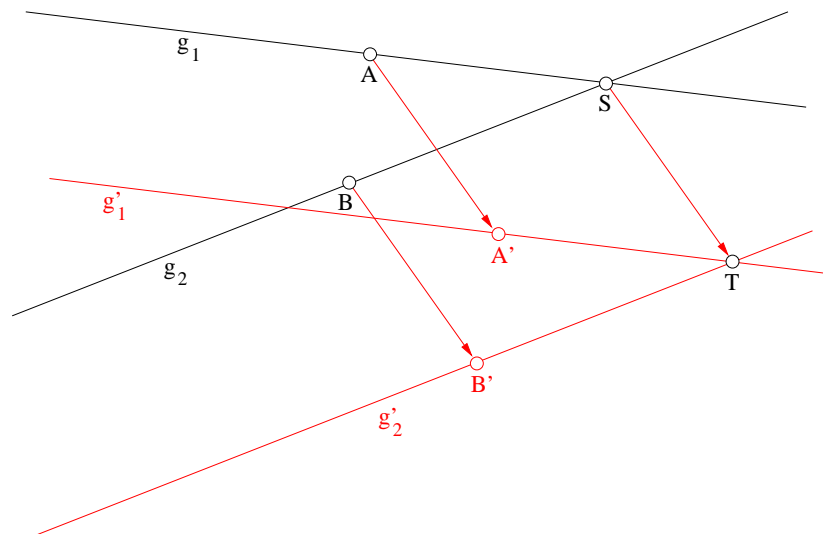
Die Anzahl der Fische wird wie folgt bezeichnet: h Hechte, b Barsche, $p = 125$ Plätzen.

Da es $\frac{1}{5}$ so viele Hechte wie Plätzen gibt, gilt $h = \frac{125}{5} = 25$. Zu den Barschen ist bekannt, daß es doppelt so viele wie Hechte waren, also $b = 2h = 2 \cdot 25 = 50$.

Insgesamt wurden an dem Tag also $h + b + p = 25 + 50 + 125 = 200$ Fische gefangen.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 130522:



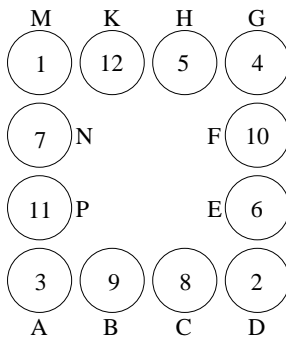
Eine Gerade ist durch 2 Punkte auf ihr eindeutig gekennzeichnet. Wenn nun also pro Gerade 2 Punkte vorhanden sind, können diese beiden Punkte entsprechend Verschiebungsvorschrift verschoben und anschließend die Gerade durch diese beiden Punkte konstruiert werden.

Als Punkte werden beliebige Punkte A und B auf g_1 und g_2 gewählt. Ihre Bildpunkte nach der Verschiebung sind A' und B' . Aus dem Punkt S , der auf beiden Geraden liegt, entsteht nach der Verschiebung der Bildpunkt T . Entsprechend ergibt sich die Gerade g'_1 aus A' und T sowie g'_2 aus B' und T .

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel



Lösung 130523:



- a) Eine Möglichkeit ist die nebenstehend angegebene Lösung.
 b) In den Feldern A , D , G und M an den Ecken sind die Zahlen 1, 2, 3 und 4 enthalten.

Zur Begründung: Die Summe aller Zahlen in den Feldern sei mit s benannt, dann gilt:

$$\begin{aligned}
 2s &= 2 \cdot (A + B + C + D + E + F + G + H + K + M + N + P) \\
 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12) &= (A + B + C + D) + E + F + (G + H + K + M) + N + P \\
 &\quad + B + C + (D + E + F + G) + H + K + (M + N + P + A) \\
 2 \cdot 78 &= 22 + E + F + 22 + B + C + 22 + H + K + 22 \\
 156 &= 88 + (B + C + E + F + H + K + N + P) \\
 68 &= s - (A + D + G + M) \\
 A + D + G + M &= 78 - 68 \\
 A + D + G + M &= 10
 \end{aligned}$$

Wenn die kleinsten möglichen Werte für A , D , G und M eingesetzt werden, erhält man $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Damit ist bewiesen, daß die Ecken immer diese Werte haben müssen.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 130524:

Jede Schicht besteht aus Dreiecken aus den Büchsen. Dabei enthält die 1. Schicht exakt eine Büchse.

Die zweite Schicht besteht aus 3 Büchsen, die als drei Ecken eines Dreiecks angesehen werden könnten (in der 1. Reihe aus 2 und in der 2. Reihe aus einer Büchse bestehend).

Die dritte Schicht besteht in der 1. Reihe aus 3, in der 2. Reihe aus 2 und in der dritten Reihe aus einer Büchse, zusammen 6 Büchsen.

In der 4. Schicht kommen 4 Büchsen hinzu (insgesamt 10 Büchsen),

in der 5. Schicht 5 Büchsen (insgesamt $10 + 5 = 15$),

in der 6. Schicht 6 Büchsen (insgesamt $15 + 6 = 21$),

in der 7. Schicht 7 Büchsen (insgesamt $21 + 7 = 28$),

in der 8. Schicht 8 Büchsen (insgesamt $28 + 8 = 36$),

in der 9. Schicht 9 Büchsen (insgesamt $36 + 9 = 45$).

Damit ergibt sich insgesamt:

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 = 165$$

Im Warenhaus werden zum Aufstellen der 9-schichtigen Pyramide 165 Büchsen benötigt.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel