13. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Saison 1973/1974

Aufgaben und Lösungen

13. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 130511:

a) Ermittle die größte Anzahl von Schnittpunkten, die 6 voneinander verschiedene gleichgroße Kreise insgesamt miteinander haben können! Dabei sind als Schnittpunkte jeweils die Schnittpunkte zweier Kreise zu verstehen.

b) Zeichne ein Beispiel, bei dem 6 Kreise die unter a) ermittelte größte Anzahl von Schnittpunkten miteinander haben und die Kreismittelpunkte überdies alle auf einer und derselben Geraden liegen! Wähle als Radius $r = 3$ cm und numeriere die Schnittpunkte.

Aufgabe 130512:

Karl soll einen Würfel der Kantenlänge 4 cm aus Knetmasse, ohne ihn zu verformen, so zerteilen, daß am Ende nur Würfel von je 1 cm Kantenlüge entstehen.

a) Ermittle die Anzahl der Würfel (der geforderten Art), die auf diese Weise entstehen!

b) Stelle fest, wieviel Schnitte Karl dabei insgesamt ausführen muß, wenn ein Schnitt niemals mehr als einen der vorher vorhandenen Körper zerteilen darf, d.h. wenn das Schneiden “im Paket” nicht gestattet ist!

Aufgabe 130513:

Das Dreifache der Summe der Zahlen 38 947 und 12 711 soll durch das Sechsfache der Differenz der Zahlen 9 127 und 8 004 dividiert werden. Wie lautet der Quotient?

Aufgabe 130514:

Aus einer Schulklasse arbeiten einige Thälmann-Pioniere im Klub der internationalen Freundschaft mit. Auf die Frage, wer von ihnen im Dolmetscherbüro dieses Klubs mitarbeitet, melden sich 7. Dann wird gefragt, wer im Länderzirkel des Klubs mitarbeitet; hierauf melden sich 6. Ebenso wird festgestellt, daß 5 der Pioniere im Zirkel junger Korrespondenten des Klubs tätig sind. Andere als diese 3 Zirkel gibt es in diesem Klub nicht.

Als Nächstes wird die Frage gestellt, wer gleichzeitig mindestens im Dolmetscherbüro und im Länderzirkel mitarbeitet; diesmal melden sich 4 der Pioniere. Ebenso ermittelt man, daß 3 von ihnen gleichzeitig mindestens im Dolmetscherbüro und im Zirkel junger Korrespondenten tätig sind und 2 von den Pionieren gleichzeitig mindestens zum Länderzirkel und zum Zirkel junger Korrespondenten gehören. Genau einer der Pioniere der genannten Schulklasse gehört allen drei Zirkeln an.

Ermittle die Anzahl aller derjenigen Pioniere dieser Klasse, die im Klub der internationalen Freundschaft mitarbeiten! (Sämtliche Zahlenangaben gelten als genau)

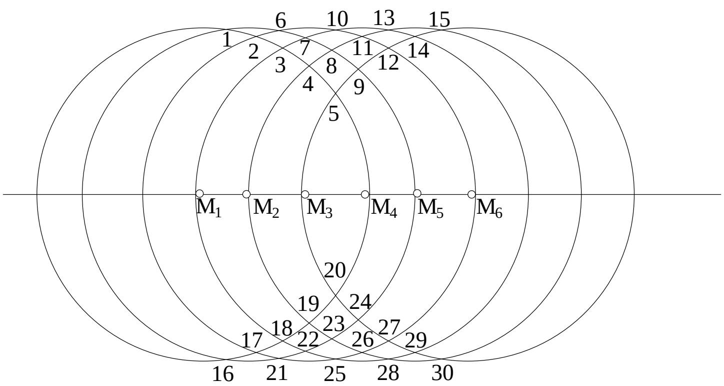
13. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 130511:

a) Die maximale Anzahl an Schnittpunkten entsteht, wenn jeder Kreis jeden der fünf anderen maximal oft schneidet. Da die Kreise nicht aufeinander liegen sollen, sind das jeweils zwei Schnittpunkte. Das ergibt dann insgesamt $2 \cdot (5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 2 \cdot 15 = 30$ Schnittpunkte:
1. Kreis mit dem 2.-6. Kreis: $2 \cdot 5 = 10$ Schnittpunkte: 1-5 und 16-20
2. Kreis mit dem 3.-6. Kreis: $2 \cdot 4 = 8$ zusätzliche Schnittpunkte: 6-9 und 21-24
3. Kreis mit dem 4.-6. Kreis: $2 \cdot 3 = 6$ zusätzliche Schnittpunkte: 10-12 und 25-27
4. Kreis mit dem 5.-6. Kreis: $2 \cdot 2 = 4$ zusätzliche Schnittpunkte: 13, 14, 28 und 29
5. Kreis mit dem 6. Kreis: 2 zusätzliche Schnittpunkte: 15 und 30

b) Zwei Kreise mit gleichem Radius haben genau dann zwei Schnittpunkte, wenn der Abstand ihrer Mittelpunkte größer als 0 und kleiner als ihr Durchmesser ist. Liegen alle Kreismittelpunkte M_1 bis M_6 von Kreisen mit dem Radius 3cm mit den Abständen $0 < |M_iM_{i+1}| < 1,2$ cm auf einer Geraden, dann ergibt sich das geforderte Beispiel, denn $|M_1M_6|$ ist kleiner als der Kreisdurchmesser 6 cm und alle anderen Abstände sind kleiner als $|M_1M_6|$: $|M_iM_j| \leq |M_1M_6| < 5 \cdot 1,2\text{ cm} = 6\text{ cm}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $j \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$



Aufgeschrieben und gelöst von Arndt Brünner

Lösung 130512:

a) Das Volumen des großen Würfels beträgt $4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 64\text{ cm}^3$. Hingegen beträgt das Volumen eines kleinen Würfels $1\text{ cm} \cdot 1\text{ cm} \cdot 1\text{ cm} = 1\text{ cm}^3$ Da die Kantenlänge so geartet ist, daß die kleinen Würfel ohne Reste in den großen Würfel hineinpassen, ergeben sich $64\text{ cm}^3 : 1\text{ cm}^3 = 64$ kleine Würfel.

b) Einen Schnitt führt man zunächst parallel zu einer Seite aus, so daß ein Quader der Kantenlängen 1 cm x 4 cm x 4 cm entsteht. Dieserart kann man 4 Quader erzeugen - durch 3 Schnitte. Jeder solche Quader kann weiterhin zerlegt werden durch weitere drei Schnitte in kleinere Quader der Kantenlänge 1 cm x 1 cm x 4 cm. Bei 4 großen Quadern macht das also $4 \cdot 3 = 12$ Schnitte. Es entstehen dabei insgesamt 16 kleine Quader. Aus jedem dieser kleinen Quader kann man 4 Würfel der gesuchten Größe erzeugen, indem man den kleinen Quader 3 mal schneidet. Das macht weitere $16 \cdot 3 = 48$ Schnitte.

In Summe benötigt man also $3 + 12 + 48 = 63$ Schnitte.

Aufgeschrieben und gelöst von Philipp

Lösung 130513:

Die Summe der Zahlen 38 947 und 12 711 beträgt 51 658. Das Dreifache ist also 154 974.

Die Differenz von 9 127 und 8 004 ist 1 123, und davon das Sechsfache: 6 738.

Teilt man diese beiden Ergebnisse, so erhält man $154\,974 : 6\,738 = 23$.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 130514:

Dolmetscherbüro (d) ⇒ 7 (1)
Länderzirkel (l) ⇒ 6 (2)
Korrespondenten (k) ⇒ 5 (3)

d+l ⇒ 4 (4)
d+k ⇒ 3 (5)
l+k ⇒ 2 (6)
d+k+l ⇒ 1 (7)

Am einfachsten könnte man die Verteilung in einer Zeichnung sehen.
In d und l ohne k sind entsprechend (4)-(7): 4 - 1 = 3 Schüler, (8)
in l und k ohne d sind entsprechend (6)-(7): 2 - 1 = 1 Schüler, (9)
in k und d ohne l sind entsprechend (5)-(7): 3 - 1 = 2 Schüler. (10)

In d ohne k und l sind entsprechend (1)-(8)-(10)-(7): 7 - 3 - 2 - 1 = 1 Schüler. (11)
In l ohne k und d sind entsprechend (2)-(8)-(9)-(7): 6 - 3 - 1 - 1 = 1 Schüler. (12)
In k ohne l und d sind entsprechend (3)-(10)-(9)-(7): 5 - 2 - 1 - 1 = 1 Schüler. (13)

Werden nun alle Teile zusammengefaßt, so erhält man:
(11)+(12)+(13)+(8)+(9)+(10)+(7) ⇒ 1+1+1+3+1+2+1 = 10.

10 Schüler der Klasse arbeiten folglich im Klub der internationalen Freundschaft mit.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel