12. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Saison 1972/1973

Aufgaben und Lösungen

12. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 120911:

Zeigen Sie, daß es für jede ganze Zahl $n \geq 4$ einen ebenflächig begrenzten Körper mit genau n Ecken und genau n Flächen gibt! (Es genügt die Angabe je eines Beispiels.)

Aufgabe 120912:

Während einer GST-Übung schätzten Andreas und Frank die Länge einer Strecke. Wenn Andreas um 10 % weniger geschätzt hätte, hätte er die genaue Länge getroffen. Wenn Franks Schätzwert um 10 % höher gelegen hätte, hätte er die genaue Länge der Strecke getroffen.

Bei welcher der beiden Schätzungen ist der absolute Betrag des absoluten Fehlers geringer?

Aufgabe 120913:

Ein Durchmesser AB eines Kreises werde von einer Sehne CD in einem Punkt E geschnitten, der AB innen im Verhältnis $2:5$ teilt. Dabei schneide die Sehne CD den Durchmesser AB unter einem Winkel von 30°.

Ermitteln Sie den Abstand der Sehne vom Mittelpunkt M des Kreises, wenn die Länge d des Durchmessers gegeben ist!

Aufgabe 120914:

Es ist die größte siebenstellige Zahl zu ermitteln, die mit paarweise verschiedenen Ziffern dargestellt werden kann und durch 72 teilbar ist.

12. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 120911:

Jede Pyramide, deren Grundfläche ein $(n-1)$-Eck ist, hat genau n Ecken (nämlich die $n-1$ Ecken der Grundfläche und die Spitze) und genau n Flächen (nämlich die $n-1$ Mantelflächen und die Grundfläche).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)

Lösung 120912:

Die genaue Länge der Strecke S liegt nach Andreas Schätzung A um 10% unter seinem Wert; also bei $\frac{9}{10}A = S$. Franks Schätzung F muß um 10% erhöht werden, um den genauen Wert S zu erhalten; also $\frac{11}{10}F = S$. Andreas Wert ist somit $A = \frac{10}{9}S$ und der Betrag des absoluten Fehlers $A = |\frac{10}{9}S - S| = \frac{1}{9}S$. Franks Wert ist $F = \frac{10}{11}S$ und der Betrag des absoluten Fehlers
$F = |\frac{10}{11}S - S| = \frac{1}{11}S$. Bei Franks Schätzwert ist der Betrag des absoluten Fehlers kleiner als bei Andreas Schätzwert ($\frac{1}{11}S < \frac{1}{9}S$).

Aufgeschrieben und gelöst von Thomas Kugel

Lösung 120913:

Bei geeigneter Wahl der Bezeichnungen A, B gilt nach Voraussetzung

$$|AE| = \frac{2}{7}d \qquad (1)$$

und

$$|EB| = \frac{5}{7}d, \qquad (2)$$

also

$$|EM| = \frac{1}{2}d - \frac{2}{7}d = \frac{3}{14}d. \qquad (3)$$

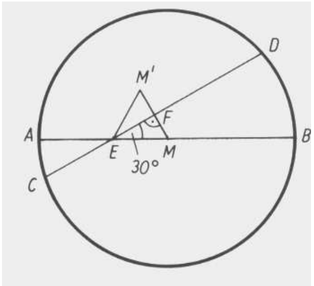
F sei der Fußpunkt des Lotes von M auf CD. Dann ist ΔEMF rechtwinklig mit $|\sphericalangle MEF| = 30°$ (nach Voraussetzung), also

$$|\sphericalangle FME| = 60°. \qquad (4)$$

Man spiegele nun ΔMEF an CD. Für das dadurch erhaltene rechtwinklige Dreieck $\Delta EFM'$ gilt dann

$$|\sphericalangle FEM'| = 30° \text{ und } |\sphericalangle EM'F| = 60° \qquad (5)$$

Nach (4) und (5) ist das Dreieck $\Delta EMM'$ gleichseitig und daher der Höhenfußpunkt F auch der Mittelpunkt von MM'. Unter Berücksichtigung von (3) forlgt daraus $|MF| = \frac{3}{28}d$. Der Abstand der Sehne CD vom Mittelpunkt des Kreises beträgt also $\frac{3}{28}d$, wenn d die Durchmesserlänge des Kreises ist.



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)

Lösung 120914:
Es gilt:

a) Jede mit 9876 beginnende siebenstellige Zahl ist größer als jede *nicht* mit 9876 beginnende siebenstellige Zahl aus paarweise voneinander verschiedenen Ziffern. Denn eine solche beginnt
entweder nicht mit 9
oder zwar mit 9, aber nicht mit 98 und nicht mit 99,
oder zwar mit 98, aber nicht mit 987, nicht mit 988 und nicht mit 989,
oder zwar mit 987, aber nicht mit 9877, nicht mit 9878 und nicht mit 9879

b) Da 8 und 9 teilerfremd sind, ist eine Zahl genau dann durch 72 teilbar, wenn sie durch 8 und 9 teilbar ist.

c) Eine siebenstellige Zahl aus paarweise verschiedenen Ziffern ist genau dann durch 9 teilbar, wenn von den zehn verschiedenen Ziffern 0, 1, 2, ..., 9, deren Summe 45 beträgt, drei Ziffern weggelassen werden, deren Summe 9 beträgt.

d) Eine siebenstellige Zahl ist genau dann durch 8 teilbar, wenn die aus der Hunderter-, Zehner- und Einerziffer in dieser Reihenfolge gebildete Zahl durch 8 teilbar ist (wobei in diesem Zusammenhang mit dieser Regel auch Anfangsziffern 0 zulässig sind). Daher ist die gesuchte Zahl die größte unter denjenigen mit 9876 beginnenden Zahlen (falls es solche gibt), deren restliche Ziffern drei derart gewählte verschiedene der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5 sind, daß d) gilt und

e) die weggelassenen Ziffern die Summe 9 haben oder, äquivalent hiermit, die restlichen Ziffern die Summe 6 haben.

Nun wird e) genau von den Tripeln (0,1,5), (0,2,4) und (1,2,3) erfüllt. Sämtliche geraden dreistelligen Zahlen, mit zugelassener Anfangsziffer 0, die sich aus diesen Tripeln bilden lassen, sind, der Größe nach geordnet, 510, 420, 402, 312, 240, 204, 150, 132, 042, 024. Unter ihnen ist 312 die größte durch 8 teilbare Zahl. Daher ist 9876312 die gesuchte Zahl.

Anderer Lösungsweg

Die größte siebenstellige Zahl mit paarweise voneinander verschiedenen Ziffern ist 9876543. Denn jede solche siebenstellige Zahl (u.s.w. wie oben in a)).

Wegen $\frac{9876543}{72} = 137174\frac{15}{72}$ ist die größte durch 72 teilbare Zahl, die höchstens ebenso groß wie 9876543 ist, die Zahl

$$9876543 - 15 = 9876528.$$

Bildet man schrittweise zu jeder erhaltenen Zahl die größte darunter gelegene durch 72 teilbare Zahl, so erhält man der Reihe nach

$$9876528 - 72 = 9876456,$$
$$9876456 - 72 = 9876384,$$
$$9876384 - 72 = 9876312, ...$$

Von den erhaltenen Zahlen ist 9876312 die größte, die aus paarweise voneinander verschiedenen Ziffern besteht. Daher ist sie die gesuchte Zahl.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)

Quellenverzeichnis

(12) Buch: Neue Mathematik-Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1990, Aulis-Verlag