12. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1972/1973

Aufgaben und Lösungen

12. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 120731:

An einer Oberschule mit genau 500 Schülern bestehen mathematisch-naturwissenschaftliche, künstlerische und Sport-Arbeitsgemeinschaften. Über die Teilnahme von Schülern an diesen Arbeitsgemeinschaften ist folgendes bekannt:

(1) Genau 250 Schüler sind Mitglied mindestens einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.

(2) Genau 125 Schüler gehören mindestens einer künstlerischen Arbeitsgemeinschaft an.

(3) Genau 225 Schüler nehmen mindestens an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen Arbeitsgemeinschaft teil.

(4) Genau 25 Schüler besuchen mindestens sowohl eine künstlerische als auch eine Sport-Arbeitsgemeinschaft.

(5) Genau 75 Schüler sind mindestens sowohl Mitglied einer mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.

(6) Genau 25 Schüler nehmen mindestens sowohl an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch an einer künstlerischen Arbeitsgemeinschaft teil.

(7) Genau 5 Schüler gehören allen drei genannten Arbeitsgemeinschaftsarten an.

Ermittle die Anzahl aller Schüler dieser Schule, die

a) an genau einer Art dieser Arbeitsgemeinschaften,

b) an keiner dieser Arbeitsgemeinschaften teilnehmen!

Aufgabe 120732:

Beweise, daß es unter 51 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren kleinste nicht kleiner als 1 und deren größte nicht größer als 100 ist, stets mindestens zwei Zahlen gibt, von denen die eine gleich dem Doppelten der anderen ist!

Aufgabe 120733:

Konstruiere ein konvexes Fünfeck $ABCDE$, das folgende Eigenschaften hat:

(1) $\overline{AB} = \overline{CD} = 5\,\text{cm}$,

(2) $\overline{\sphericalangle EAB} = \overline{\sphericalangle ABC} = 95°$,

(3) $\overline{BC} = \overline{CE} = \overline{BE}$,

(4) $\overline{AE} = \overline{ED}$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Bedingungen (1) bis (4) ein konvexes Fünfeck $ABCDE$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 120734:

Als die Klasse 7a den Fachunterrichtsraum für Mathematik betrat, war an der Wandtafel eine Multiplikationsaufgabe angeschrieben. Jemand hatte jedoch die Ziffern derart verwischt, daß nur noch vier "Einsen" leserlich geblieben waren und von den unleserlichen Ziffern lediglich noch zu erkennen war, an welcher Stelle sie gestanden hatten.

Das Bild an der Wandtafel hatte folgendes Aussehen: (Die unleserlichen Ziffern sind hier durch die Buchstaben a, b, c, ... angegeben. Dabei können also verschiedene Buchstaben auch die gleiche Ziffer, möglicherweise auch nochmals die Ziffer 1, bezeichnen.)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & a & b & \cdot & c\ d \\
\hline
 & e & f & g & 1 & & \\
h & i & j & 1 & & & \\
\hline
k & m & n & 1 & p & &
\end{array}$$

Einige Schüler versuchten sofort, die fehlenden Ziffern zu ermitteln, und schon nach kurzer Zeit rief Bernd: "Ich weiß genau, wie die beiden Faktoren hießen!" Doch Gerd entgegnete ihm: "Es läßt sich nicht eindeutig feststellen, wie die beiden Faktoren lauteten."

Stelle fest, ob Bernd oder Gerd recht hatte! Gib in jedem Falle alle Lösungen (Realisierungen) des Multiplikationsschemas an!

Aufgabe 120735:

Ermittle alle nichtnegativen rationalen Zahlen x, die die Gleichung $x + |x - 1| = 1$ erfüllen!

Aufgabe 120736:

Beweise den folgenden Satz:

Für jedes Dreieck ΔABC gilt: Zieht man bei zwei beliebigen Höhen dieses Dreiecks jeweils durch deren Mittelpunkt die Parallele zu der zur Höhe gehörenden Dreieckseite, so schneiden sich diese Parallelen in einem Punkt, der auf der dritten Dreieckseite liegt!

12. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 120731:

Mit den Buchstaben M, S, K und den Buchstabengruppen MS, MK, SK, MSK seien die Anzahlen derjenigen Schüler bezeichnet, die an den entsprechenden Arbeitsgemeinschaften (M: mathematisch-naturwissenschaftlich, S: Sport-AG, K: künstlerische AG) teilnehmen, aber nicht an den übrigen. Mit N sei die Anzahl derjenigen Schüler bezeichnet, die an keiner der Arbeitsgemeinschaften teilnehmen. Dann folgt:

(0) $N + M + S + K + MS + MK + SK + MSK = 500$,

(1) $S + MS + SK + MSK = 250$,

(2) $MK + SK + MSK = 125$,

(3) $M + MS + MK + MSK = 225$,

(4) $SK + MSK = 25$,

(5) $MS + MSK = 75$,

(6) $MK + MSK = 25$,

(7) $MSK = 5$.

Wegen (7) und (4) bzw (5) bzw. (6) ist

(8) $SK = 20$,

(9) $MS = 70$,

(10) $MK = 20$.

Wegen (7) und (1), (8), (9) bzw. (2), (8), (10) bzw. (3), (9), (10) ist

(11) $S = 155$,

(12) $K = 80$,

(13) $M = 130$.

Wegen (0), (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13) ist $N = 20$.

Die in a) gesuchte Anzahl ist $S + K + M$; wegen (11), (12), (13) beträgt sie 365. Die in b) gesuchte Anzahl ist $N = 20$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

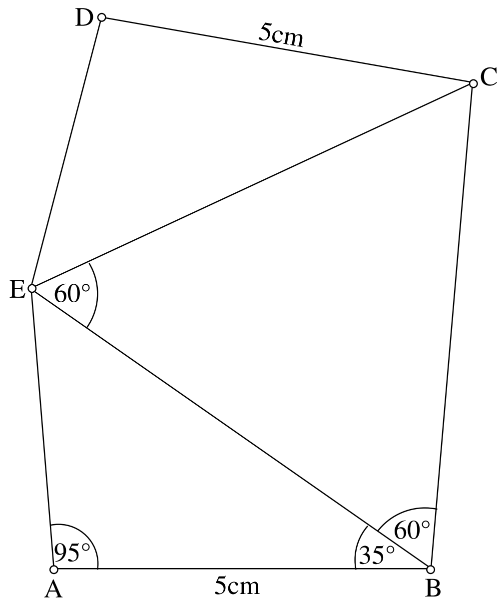
Lösung 120732:

Die kleinste der 51 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sei j. Dann gilt $1 \leq j$, und die aufeinanderfolgenden Zahlen lauten (1) j, $j+1$, $j+2$, ..., $j+49$, $j+50$.

Nun gilt laut Aufgabe $j + 50 \leq 100$, also $1 \leq j \leq 50$. Folglich gehört $j + j = 2j$ auch zu den in (1) aufgezählten 51 aufeinanderfolgenden Zahlen. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 120733:



(I) Angenommen, $ABCDE$ sei ein Fünfeck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Dann ist ΔBCE gleichseitig, also gilt $\sphericalangle CBE = 60°$. Ferner liegen A und C nicht auf derselben Seite der Geraden durch die Punkte B und E, da $ABCDE$ konvex ist.

Daher gilt: $\overline{\sphericalangle ABE} = \overline{\sphericalangle ABC} - \overline{\sphericalangle CBE} = 95° - 60° = 35°$.

(II) Daher erfüllt ein Fünfeck $ABCDE$ nur dann die Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(α) Wir konstruieren ein Dreieck ΔABE aus $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{\sphericalangle EAB} = 95°$ und $\overline{\sphericalangle ABE} = 35°$.

(β) Wir schlagen die Kreise um B und E mit dem Radius $\overline{BE}$. Schneiden sie sich in einem Punkt, der nicht auf derselben Seite der Geraden durch B und E wie A liegt, so sei dieser C genannt.

(γ) Wir schlagen den Kreis um C mit dem Radius 5 cm und den Kreis um E mit dem Radius $\overline{AE}$. Schneiden sie sich in einem nicht auf derselben Seite der Geraden durch C und E wie B liegenden Punkt, so sei dieser D genannt.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Fünfeck $ABCDE$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach Konstruktion ist $\overline{AB} = \overline{CD} = 5$ cm, $\overline{BC} = \overline{CE} = \overline{BE}$, $\overline{AB} = \overline{DE}$, also sind (1), (3), (4) erfüllt.

Ferner ist $\overline{\sphericalangle EAB} = 95°$, $\overline{\sphericalangle ABE} = 35°$, und, da ΔBCE gleichseitig ist, $\overline{\sphericalangle CBE} = \overline{\sphericalangle BCE} = \overline{\sphericalangle BEC} = 60°$.

Da A und C auf verschiedenen Seiten der Geraden durch B und E liegen, gilt $\overline{\sphericalangle ABC} = \overline{\sphericalangle ABE} + \overline{\sphericalangle CBE} = 35° + 60° = 95°$, also ist auch (2) erfüllt, und es gilt $\overline{\sphericalangle AEB} = 180° - 95° - 35° = 50°$.

Weiterhin ist $\Delta DCE \cong \Delta ABE$ (sss), also $\overline{\sphericalangle EDC} = 95°$, $\overline{\sphericalangle DCE} = 35°$ und $\overline{\sphericalangle DEC} = 50°$.

Da ferner B und D auf verschiedenen Seiten der Geraden durch C und E liegen, gilt $\overline{\sphericalangle BCD} = \overline{\sphericalangle BCE} + \overline{\sphericalangle DCE} = 60° + 35° = 95°$.

Schließlich gilt: $\overline{\sphericalangle AED} = \overline{\sphericalangle AEB} + \overline{\sphericalangle BEC} + \overline{\sphericalangle DEC} = 50° + 60° + 50° = 160°$.

Also hat $ABCDE$ an allen fünf Ecken Innenwinkel, deren jeder kleiner als 180° ist, ist somit konvex.

(IV) Konstruktionsschritt (α) ist wegen $95° + 35° < 180°$ nach dem Kriterium wsw bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.

Ebenso ist Konstruktionsschritt (β) aus bekannten Gründen eindeutig ausführbar, d.h., es existiert genau ein solcher Schnittpunkt C.

Schließlich ist auch Konstruktionsschritt (γ) aus bekannten Gründen eindeutig ausführbar. Das Fünfeck $ABCDE$ ist somit durch die Bedingungen (1) bis (4) bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 120734:

Offensichtlich gilt $p = 1$ und $g = 0$. Da in der zweiten und in der dritten Zeile je eine vierstellige Zahl steht, gilt $d \neq 1$ und $c \neq 1$. Das Produkt $b \cdot d$ endet ebenso wie das Produkt $b \cdot c$ mit 1.

Es sind nun genau die folgenden drei Fälle möglich:

1. Fall: Es sei $b = 9$, $c = d = 9$. Daraus folgt $b \cdot d = 81$. Wegen $g = 0$ muß das Produkt $a \cdot d$, also $a \cdot 9$, mit der Ziffer 2 enden, (denn $2 + 8 = 10$). Das ist aber genau für $a = 8$ der Fall. Der erste Faktor heißt somit 189, der zweite 99.

Tatsächlich führt die Rechnung $189 \cdot 99$ zu einem Tafelbild, das der Aufgabenstellung entspricht.

2. Fall: Es sei $b = 7$, $c = d = 3$. Da der erste Faktor kleiner als 200 ist, ist sein Dreifaches kleiner als 600, also eine dreistellige Zahl, was im Widerspruch zur zweiten Zeile steht. Dieser Fall führt somit zu keiner Lösung.

3. Fall: Es sei $b = 3$, $c = d = 7$. Daraus folgt $b \cdot d = 21$. Das Produkt $a \cdot d$, also $a \cdot 7$, muß dann mit der Ziffer 8 enden (denn $2 + 8 = 10$). Das ist genau für $a = 4$ der Fall. Als erster Faktor ergibt sich damit 143, der zweite lautet 77.

Tatsächlich führt die Rechnung $143 \cdot 77$ zu einem Tafelbild, das der Aufgabenstellung entspricht.

Das Multiplikationsschema hat somit genau zwei, und zwar die beiden folgenden Realisierungen:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & 8 & 9 & \cdot & 9 & 9 \\ \hline & 1 & 7 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 7 & 0 & 1 & & & & \\ \hline 1 & 8 & 7 & 1 & 1 & & & \\ \hline\hline \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & 1 & 4 & 3 & \cdot & 7 & 7 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & & \\ \hline\hline \end{array}$$

Gerd hatte also recht, Bernd dagegen nicht.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 120735:

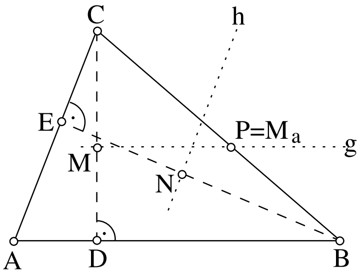
Es sei x eine beliebige rationale Zahl, für die $0 \leq x \leq 1$ gilt. Dann gilt $x + |x - 1| = x + 1 - x = 1$, also ist die gegebene Gleichung erfüllt. Daher erfüllen alle rationalen Zahlen x, für die $x + |x - 1| = x + 1 - x = 1$ gilt, diese Gleichung.

Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl $x > 1$, die die Gleichung $x + |x - 1| = 1$ erfüllt. Dann wäre $1 = x + |x - 1| = x + x - 1$ und somit $2x = 2$, also $x = 1$, im Widerspruch zu $x > 1$. Also gibt es keine rationale Zahl $x > 1$, die die gegebene Gleichung erfüllt.

Daher erfüllen genau alle diejenigen nicht negativen rationalen Zahlen x, für die $(0 \leq) x \leq 1$ gilt, die gegebene Gleichung.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 120736:



Die zwei im Satz genannten Höhen seien o.B.d.A. die zu AB und AC gehörenden. Ihre Fußpunkte seien D bzw. E, ihre Mittelpunkte M bzw. N.

Die genannten Parallelen, g parallel zu AB durch M bzw. h parallel zu AC durch N, sind nicht parallel zueinander (da AB nicht zu AC parallel ist), sie schneiden sich daher in genau einem Punkte.

Nun schneidet g den Strahl aus B durch C (da M und C auf derselben Seite der Geraden durch A und B liegen) in einem Punkt P.

Ist F der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC, so haben die Dreiecke ΔABM und ΔABP jeweils den Flächeninhalt $\frac{1}{2}F$; denn diese drei Dreiecke stimmen in der Seite AB überein, und die zugehörige Höhe hat im ersten Dreieck die Länge $\overline{CD}$, in den beiden anderen Dreiecken jeweils die Länge $\overline{MD} = \frac{1}{2}\overline{CD}$.

Da nun die Dreiecke ΔABC und ΔABP in der zur Seite BC bzw. zur Seite BP gehörenden Höhe übereinstimmen, folgt unter Berücksichtigung der Aussagen über ihren Flächeninhalt $\overline{BP} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. Also schneidet g die Strecke BC in ihrem Mittelpunkt M_a.

Analog beweist man, daß auch h die Strecke BC in M_a schneidet. Daher ist M_a ein gemeinsamer Punkt von g und h, folglich ihr Schnittpunkt, und da M_a auf BC liegt, ist hiermit die Behauptung bewiesen. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.