11. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1971/1972

Aufgaben und Lösungen

11. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110711:

Ermittle alle vierstelligen natürlichen Zahlen Z mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Zahl Z ist durch 8 teilbar.

(2) Die Ziffern von Z sind paarweise voneinander verschieden, d.h. in jeder dieser Zahlen darf jede Ziffer höchstens einmal auftreten.

(3) Alle verwendeten Ziffern bezeichnen, einzeln für sich betrachtet, jeweils Primzahlen.

Aufgabe 110712:

Beweise folgenden Satz:

Enthält ein rechtwinkliges Dreieck einen Winkel von 30°, so ist seine Hypotenuse (längste Seite) doppelt so lang wie seine kürzeste Kathete (kürzeste Seite)!

Aufgabe 110713:

Günther zeichnet ein Dreieck ΔABC und stellt fest:

Die Maßzahl des in Zentimetern gemessenen Umfangs u seines Dreiecks ΔABC ist eine Primzahl. Ferner gilt $\overline{BC} = a = 6$ cm, $\overline{AC} = b = 2$ cm.

Ermittle $\overline{AB} = c$ und u!

Aufgabe 110714:

Konstruiere ein Dreieck ΔABC aus b, c (mit $c > b$) und $\alpha + \beta$!

Dabei sind b die Länge der Seite AC, c die der Seite AB, α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke stets ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

11. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 110711:

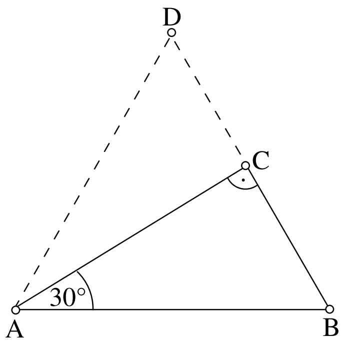
Wegen (3) kommen nur die Ziffern 2, 3, 5 und 7 in Frage. Wegen (2) müssen sie bei jeder der gesuchten Zahlen auch sämtlich verwendet werden. Daher und wegen (1) muß die Ziffer 2 die Einerstelle der gesuchten Zahlen besetzen.

Mithin können höchstens die Zahlen 3 572; 3 752; 5 372; 5 732; 7 352; 7 532 den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Die Zahlen 3 752 und 7 352 sind durch 8 teilbar, die anderen dagegen nicht. Also erfüllen 3 752 und 7 352 als einzige alle Bedingungen der Aufgabe.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 110712:



Es sei ΔABC ein Dreieck der geforderten Art, wobei C Scheitel des rechten Winkels und A Scheitel des Winkels von 30° sei.

Dann ist AB die Hypotenuse und BC kürzeste Kathete, da der Winkel $\sphericalangle BAC$ kleiner ist als $\sphericalangle ABC$, wie aus dem Winkelsummensatz hervorgeht.

Wegen des Winkelsummensatzes hat der Innenwinkel bei B eine Größe von 60°. Verlängert man die Strecke BC über C hinaus um $\overline{BC}$ bis zum Punkt D, dann gilt $\Delta ACD \simeq \Delta ACB$ (sws). Daher hat der Winkel $\sphericalangle DAC$ eine Größe von 30°. Das Dreieck ΔABD ist mithin gleichseitig, und es gilt $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 110713:

Aus der Dreiecksungleichung folgt für das Dreieck ΔABC: $c < a+b$ und $c > a-b$. Daraus folgt laut Aufgabe 4 cm $< c <$ 8 cm.

Da die Maßzahl des Umfangs u eine Primzahl sein soll und die Maßzahlen von a und b ganze Zahlen sind, muß auch die Maßzahl von c eine ganze Zahl z sein, für die $4 < z < 8$ gilt. Also kann z nur 5, 6 oder 7 sein.

Es sei $z = 5$. Dann ist $u = a + b + c = 13$ cm, und 13 ist eine Primzahl.

Es sei $z = 6$. Dann ist $u = 14$ cm.

Es sei $z = 7$. Dann ist $u = 15$ cm.

In den letzten beiden Fällen ist die Maßzahl von u keine Primzahl. Also ist $c = 5$ cm, $u = 13$ cm die einzige Lösung der Aufgabe.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 110714:

(I) Angenommen, ΔABC sei ein Dreieck, wie es laut Aufgabenstellung konstruiert werden soll. Dann hat der Winkel $\sphericalangle BCA$ wegen des Winkelsummensatzes im Dreieck eine Größe von $180° - (\alpha + \beta)$.

Mithin läßt sich die Aufgabe auf eine Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und einem einer der beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel zurückführen.

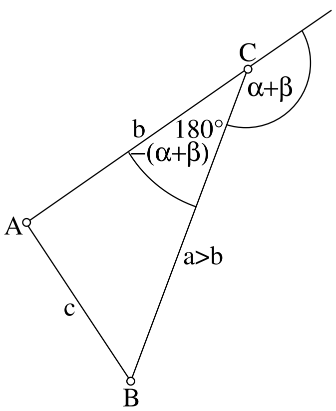
(II) Infolgedessen kann ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir zeichnen eine Strecke AC der länge b.

(2) Wir zeichnen einen Winkel der Größe $\alpha+\beta$ und zu ihm einen Nebenwinkel, dessen Größe somit $180° - (\alpha + \beta)$ beträgt.

(3) Wir tragen in C an AC einen Winkel der Größe $180°-(\alpha+\beta)$ an.

(4) Wir schlagen den Kreis k um A mit c. Schneidet er den freien Schenkel s (zu dem C nicht mit hinzugerechnet werde) des beim Konstruktionsschritt (3) angetragenen Winkels, so sei einer der entstehenden Schnittpunkte B genannt.



(III) Der Beweis, daß je drei so gewonnene Punkte A, B, C die Ecken eines Dreiecks ΔABC bilden, das allen Bedingungen der Aufgabe entspricht, folgt unmittelbar aus dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck und aus (II).

(IV) Es sei angenommen, daß die gegebenen Größen die (trivialen) Bedingungen $b > 0$; $c > 0$; $0° < (\alpha+\beta) < 180°$ erfüllen. Dann sind die Konstruktionsschritte (II) (1), (2), (3) stets (bis auf Kongruenz) eindeutig ausführbar.

Wegen c > b schneidet der Kreis k (siehe (II) (4)) den freien Schenkel s in genau einem Punkt. Daher existiert (bis auf Kongruenz) genau ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.