10. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1970/1971

Aufgaben und Lösungen

10. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 100711:

Bei einem Sportfest soll zwischen jungen Pionieren und FDJlern ein Wettlauf nach folgenden Regeln ausgetragen werden:

Auf den Mittelpunkt einer der kürzeren Seiten eines rechteckigen Spielfeldes ($50\,\text{m} \times 70\,\text{m}$) stellt sich ein FDJler, auf den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite ein Pionier. Beide sollen auf ein Kommando auf dem kürzesten Wege von ihren Startplätzen zu der gleichen, auf dem Spielfeld aufgestellten Fahne laufen. Zu diesem Zweck soll die Fahne, wenn die beiden Läufer auf ihren Startplätzen stehen, so aufgestellt werden, daß sie von dem FDJler 50 m, von dem Pionier 25 m entfernt ist.

Gib die Anzahl aller Möglichkeiten an, die Fahne gemäß den Bedingungen auf dem Spielfeld aufzustellen!

Aufgabe 100712:

Die Zahl 17 soll als Summe von Quadraten natürlicher, von 0 verschiedener Zahlen dargestellt werden. Gib alle voneinander verschiedenen Möglichkeiten an!

Anmerkung: Zwei Darstellungen dieser Art gelten genau dann als verschieden voneinander, wenn wenigstens ein Summand in der einen Darstellung nicht ebenso oft auftritt wie in der anderen Darstellung.

Aufgabe 100713:

a) Beweise folgenden Satz: Wenn vier natürliche Zahlen eine ungerade Zahl als Summe haben, so haben sie als Produkt eine gerade Zahl.

b) Untersuche, ob für jede gerade Anzahl von natürlichen Zahlen der folgende Satz gilt:

   Wenn diese natürlichen Zahlen eine ungerade Zahl als Summe haben, so haben sie als Produkt eine gerade Zahl.

Aufgabe 100714:

$ABCD$ sei in der üblichen Bezeichnungsweise ein Rechteck, und es gelte $\overline{AB} \geq \overline{BC}$. A_1 sei der Fußpunkt des Lotes von A auf die Diagonale DB. A_2 sei der Schnittpunkt der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle DAB$ mit DB, C_2 sei der Schnittpunkt der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle BCD$ mit DB, und C_1 sei der Fußpunkt des Lotes von C auf DB.

Man beweise, daß unter diesen Bedingungen $\sphericalangle A_1AA_2 \cong \sphericalangle A_2AC \cong \sphericalangle ACC_2 \cong \sphericalangle C_2CC_1$ gilt.

Dabei sind folgende Fälle zu betrachten:

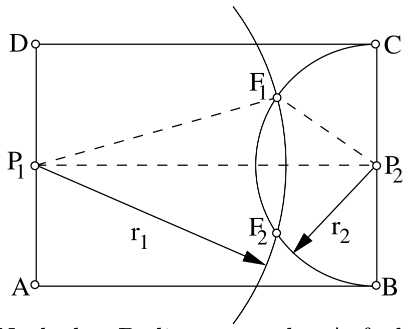
a) $\overline{AB} = \overline{BC}$,

b) $\overline{AB} > \overline{BC}$.

10. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 100711:



Die Eckpunkte des Spielfeldes seien so mit A, B, C, D und die Standorte der Läufer so mit P_1 (für den FDJ-ler) und P_2 (für den Pionier) bezeichnet, wie es die Abbildung angibt. Dann gilt:

$$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{P_1P_2} = 70\,\text{m}$$
$$\overline{AD} = \overline{BC} = 50\,\text{m}$$
$$\overline{AP_1} = \overline{P_1D} = \overline{BP_2} = \overline{P_2C} = 25\,\text{m}.$$

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist ein Punkt genau dann einer der gesuchten Standorte der Fahne, wenn er

1. auf dem Kreis mit dem Radius $r_1 = 50\,\text{m}$ um P_1,
2. auf dem Kreis mit dem Radius $r_2 = 25\,\text{m}$ um P_2 und
3. innerhalb des Rechtecks $ABCD$ liegt.

Wegen $r_1 > r_2$ und $r_1 - r_2 < \overline{P_1P_2} < r_1 + r_2$ gibt es genau 2 Punkte, die beide Kreise gemeinsam haben. Diese Punkte seien F_1 und F_2 genannt.

Wegen $r_1 < \overline{P_1P_2}$ liegen F_1 und F_2 auf derselben Seite der Geraden durch B und C wie P_1.

Der auf derselben Seite liegende Halbkreis um P_2 mit dem Radius r_2 liegt wegen $\overline{BP_2} = \overline{P_2C} = r_2$ ganz auf dem Spielfeld. Infolgedessen liegen auch F_1 und F_2 auf dem Spielfeld.

Es gibt mithin genau diese 2 Punkte als Möglichkeiten, die Fahne gemäß den Bedingungen der Aufgabe aufzustellen.

Aufgeschrieben von Reinhard Neumann – Quelle: (14)

Lösung 100712:

Unter den Quadraten natürlicher, von 0 verschiedener Zahlen gibt es genau 4, die nicht größer als 17 sind, nämlich 1; 4; 9; 16.

Sämtliche Möglichkeiten, 17 als Summe aus diesen Quadratzahlen darzustellen, sind die folgenden:

$$17 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$$
$$17 = 4+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$$
$$17 = 4+4+1+1+1+1+1+1+1+1+1$$

$$17 = 4+4+4+1+1+1+1+1$$
$$17 = 4+4+4+4+1$$
$$17 = 9+1+1+1+1+1+1+1+1$$
$$17 = 9+4+1+1+1+1$$
$$17 = 9+4+4$$
$$17 = 16+1$$

Beweis:

Es gibt genau folgende Fälle:

1) Der größte auftretende Summand ist 1 (Möglichkeit 1).
2) Der größte auftretende Summand ist 4
   - 2.1. Er tritt genau 1mal auf (Möglichkeit 2).
   - 2.2. Er tritt genau 2mal auf (Möglichkeit 3).
   - 2.3. Er tritt genau 3mal auf (Möglichkeit 4).
   - 2.4. Er tritt genau 4mal auf (Möglichkeit 5).
3) Der größte auftretende Summand ist 9. Dieser kann höchstens 1mal auftreten.
   - 3.1. Unter den übrigen Summanden ist 1 der größte (Möglichkeit 6).
   - 3.2. Unter den übrigen Summanden ist 4 der größte. Er kann höchstens 2mal auftreten.
     - 3.2.1. Er tritt genau 1mal auf (Möglichkeit 7).
     - 3.2.2. Er tritt genau 2mal auf (Möglichkeit 8).
4) Der größte auftretende Summand ist 16. Dieser kann höchstens 1mal auftreten (Möglichkeit 9).

Aufgeschrieben von Reinhard Neumann – Quelle: (14)

Lösung 100713:

1. Wenn die Summe s 4 natürlicher Zahlen a, b, c, d ungerade ist, muss mindestens eine der Zahlen gerade sein, denn wenn alle ungerade wären, wäre die Summe gerade: $s = a + b + c + d = (2k + 1) + (2i + 1) + (2j + 1) + (2l + 1) = 2(k + i + j + l + 2)$ Damit wäre s ein Vielfaches von 2 und somit gerade ($\Rightarrow$ Widerspruch zur Voraussetzung), also muss mindestens eine der Zahlen a, b, c, d gerade sein. Also gilt mit o.B.d.A. $a = 2k$ für das Produkt p: $p = a \cdot b \cdot c \cdot d = 2k \cdot b \cdot c \cdot d$ und das ist eine gerade Zahl.

2. Wenn die Summe s von einer geraden Anzahl natürlicher Zahlen ungerade ist, muss mindestens eine der Zahlen gerade sein, denn wenn alle $2x$ Zahlen ungerade wären, wäre die Summe gerade: $s = (2k + 1) + (2i + 1) + (2j + 1) + (2l + 1) + ... = 2(k + i + j + l + ... + x)$ wäre ein Vielfaches von 2 und somit gerade, also muss mindestens eine Zahl gerade sein. Also gilt mit o.B.d.A. $a = 2k$ für das Produkt p: $p = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot ... = 2k \cdot b \cdot c \cdot d \cdot ...$ und das ist wieder eine gerade Zahl.

Hinweis: Man kann auch den 2. Teil der Aufgabe zuerst zeigen und anschließend den 1. Teil als Spezialfall des 2. als bereits gezeigt darstellen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Felix Kaschura

Lösung 100714:

Es sei M der Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks $ABCD$. Ferner sei $\sphericalangle ABD = \alpha$, $\sphericalangle ADB = \beta$ gesetzt.

a) Im Fall $\overline{AB} = \overline{BC}$ ist $ABCD$ ein Quadrat. Also stehen die Diagonalen AC und BD aufeinander senkrecht; ferner halbiert die Diagonale AC den Winkel $\sphericalangle DAB$ und den Winkel $\sphericalangle BCD$.

   Daraus folgt $A_1 = A_2 = M = C_2 = C_1$, also haben alle vier in der Behauptung genannten Winkel die Größe 0°. □

b) Im Fall $\overline{AB} > \overline{BC}$ erhält man zunächst aus

(1) $\Delta BAD \cong \Delta ABC \cong \Delta DCB \cong \Delta CDA$ (s,w,s) die Gleichungen

(2) $\alpha = \overline{\sphericalangle ABD} = \overline{\sphericalangle BAC} = \overline{\sphericalangle CDB} = \overline{\sphericalangle DCA}$

(3) $\beta = \overline{\sphericalangle ADB} = \overline{\sphericalangle BCA} = \overline{\sphericalangle CBD} = \overline{\sphericalangle DAC}$. Weiter gilt

(4) $\alpha + \beta = 90°$, da die in (1) genannten Dreiecke (bei A bzw. B bzw. C bzw. D) rechtwinklig sind.

Ferner ist in jedem dieser Dreiecke diejenige Seite, die einem der in (2) auftretenden Winkel gegenüberliegt, kleiner als diejenige Seite, die einem der in (3) auftretenden Winkel gegenüberliegt; also gilt

(5) $\alpha < \beta$.

Aus (4) und (5) folgt $2\alpha < \alpha + \beta = 90°$, also

(6) $\alpha < 45°$.

Da auch die Dreiecke ΔAA_1D und ΔCC_1B bei A_1 bzw. C_1 rechtwinklig sind, folgt aus (3) und (4)

(7) $\overline{\sphericalangle DAA_1} = \overline{\sphericalangle BCC_1} = \alpha$

Nach (7), (2) und der Definition von A_2 und C_2 folgt nun $\overline{\sphericalangle A_1AA_2} = 45° - \alpha$ und $\overline{\sphericalangle A_2AC} = 45° - \alpha$

Analog gilt $\overline{\sphericalangle ACC_2} = 45° - \alpha$ und $\overline{\sphericalangle C_2CC_1} = 45° - \alpha$ und demzufolge

$$\sphericalangle A_1AA_2 \cong \sphericalangle A_2AC \cong \sphericalangle ACC_2 \cong \sphericalangle C_2CC_1 \quad \square$$

Aufgeschrieben von Reinhard Neumann – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.