10. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Saison 1970/1971

Aufgaben und Lösungen

10. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 100511:

Die Abbildung 1 zeigt unter a) bis e) von fünf Würfeln je ein Schrägbild.

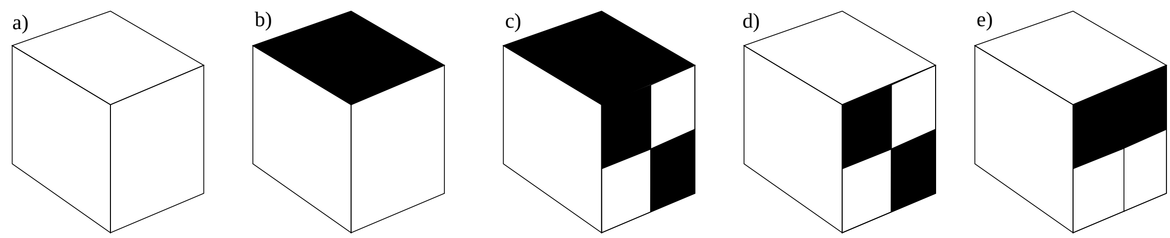


Abbildung 1

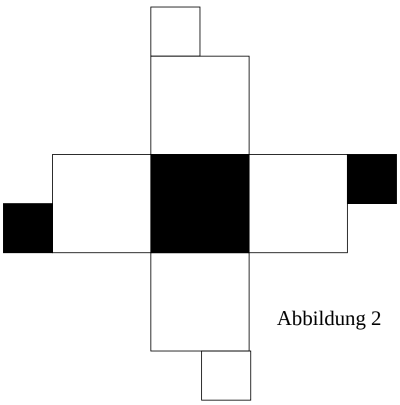


Abbildung 2

Die Abbildung 1a zeigt ein Netz, aus dem genau ein Würfel hergestellt werden kann, wenn die Seite mit den gefärbten Flächen nach außen kommen soll.

Beantworte für jedes der fünf Schrägbilder die Frage, ob es den aus dem abgebildeten Netz (Abbildung 2) hergestellten Würfel darstellen kann oder nicht!

(In den Fällen, in denen die Antwort "Ja" lautet, genügt die Angabe dieser Antwort. In den Fällen, in denen die Antwort "Nein" lautet, ist sie zu begründen.)

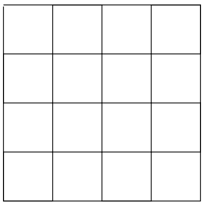
Aufgabe 100512:

In einem alten Buch mit lustigen mathematischen Knobeleien fand Annerose folgenden Vers:

> Eine Zahl hab' ich gewählt,
> 107 zugezählt,
> dann durch 100 dividiert
> und mit 11 multipliziert,
> endlich 15 subtrahiert,
> und zuletzt ist mir geblieben
> als Resultat die Primzahl 7.

Gibt es wenigstens eine Zahl, die den gegebenen Bedingungen genügt? Wenn ja. ermittle alle diese Zahlen!

Aufgabe 100513:



Gib eine Möglichkeit an, die Zahlen 1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 7; 8; 8 so in die Felder des abgebildeten quadratischen Netzes einzutragen, daß als Summe der Zahlen jeder Zeile (waagerecht), jeder Spalte (senkrecht), jeder der beiden Diagonalen (von links oben nach rechts unten und von rechts oben nach links unten) und als Summe der Zahlen in den vier Eckfeldern die Zahl 18 erhalten wird! (Keine Begründung erforderlich)

Aufgabe 100514:

Hans und Günter wollen Briefmarken tauschen. Auf die Frage nach der Anzahl seiner Tauschmarken antwortet Günter:

"Ich habe heute polnische, sowjetische und bulgarische Briefmarken und sonst keine anderen zum Tausch anzubieten. Es sind insgesamt 30 Stück. Die Anzahl der sowjetischen Marken ist größer als die der polnischen, aber kleiner als die der bulgarischen. Die Anzahl der bulgarischen Marken dagegen ist größer als das Vierfache, aber kleiner als das Fünffache der Anzahl meiner sowjetischen Marken."

Gib alle Möglichkeiten an, die folgende Tabelle so auszufüllen, daß diese Bedingungen erfüllt sind!

Anzahl der polnischen Marken	...
Anzahl der sowjetischen Marken	...
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der polnischen Marken	...
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der bulgarischen Marken	...
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Vierfachen der Anzahl der sowjetischen Marken	...
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Fünffachen der Anzahl der sowjetischen Marken	...

10. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 100511:

Die Abbildung a) kann keine Lösung sein, weil jede Ecke, die nicht an eine aus 4 kleinen Quadraten bestehende Seitenfläche stößt, die komplett schwarze Quadratseite berührt.

Würfel b) kann aus dem abgebildeten Würfelnetz hergestellt werden.

Würfel c) kann keine Lösung sein. Die Fläche mit den kleinen Quadraten stößt nicht an die Fläche, die komplett schwarz ist.

Würfel d) kann aus dem abgebildeten Würfelnetz hergestellt werden.

Würfel e) kann keine Lösung sein, weil die kleinen schwarzen Quadrate nicht nebeneinander liegen. Sie berühren sich nur an einer Ecke.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 100512:

Die gesuchte Zahl sei z. Dann kann man folgende Gleichung aufstellen:

$$\begin{aligned}(z+107):100\cdot 11-15&=7\\(z+107):100\cdot 11&=22\\(z+107):100&=2\\z+107&=200\\z&=93\end{aligned}$$

Die gesuchte Zahl lautet 93. Die Probe bestätigt diese Lösung.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 100513:

Eine mögliche Lösung ist z.B. folgende:

1	7	2	8
4	6	3	5
7	1	8	2
6	4	5	3

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 100514:

Wenn man die Anzahl der sowjetischen Marken mit s, die der polnischen mit p und der bulgarischen mit b bezeichnet, müssen folgende Bedingungen gelten:

(1) $s + p + b = 30$

(2) $p < s < b$

(3) $4s < b < 5s$

(3) kann auch umgeformt werden zu: $4s + s + p < s + p + b = 30 < 5s + s + p$ oder $5s + p < 30 < 6s + p$ (3*).

Wenn $s = 1$ wäre, kann die Aussage (3) nicht erfüllt werden.

Wenn $s = 6$ wäre, könnte Aussage (3*) nicht erfüllt werden: $30 + p < 30$. Dies wäre nur für $p = 0$ erfüllt und widerspricht der Annahme, daß es aus jedem Land auch tatsächlich Marken gibt.

Weiterhin kann der Fall $s = 2$ durch (3*) und (2) ausgeschlossen werden. Es müßte nämlich gelten: $10 + p < 30 < 12 + p$. Dies ist nur für $p = 19$ erfüllt, was aber $p < s$ widerspricht.

Analog wird $s = 3$ betrachtet und führt auf gleichem Weg zu: $15 + p < 30 < 18 + p$. Dies ist für $p = 13$ und $p = 14$ erfüllt und gleichermaßen ein Widerspruch zu $p < s$.

Für $s = 4$ ergibt dies: $20 + p < 30 < 25 + p$ und führt zu $6 \leq p \leq 9$. (2) kann weiterhin nicht erfüllt werden.

Es ist der letztmögliche Fall zu untersuchen: $s = 5$ ergibt $25 + p < 30 < 30 + p$. Lösungen sind $p \leq 4$. Für b gilt dann laut (3): $20 < b < 25$. Alle gefundenen Zahlen ergeben eine wahre Aussage (2). Es bleibt, die Aussage (1) zu erfüllen: $5 + p + b = 30$ bzw. $b = 25 - p$. Dies ergibt die folgenden 4 Zahlentripel (p,s,b): (1,5,24), (2,5,23), (3,5,22), (4,5,21), die auch tatsächlich alle geforderten Bedingungen erfüllen, wie die folgende Tabelle zeigt.

Anzahl der polnischen Marken	1	2	3	4
Anzahl der bulgarischen Marken	24	23	22	21
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der polnischen Marken	$5 > 1$	$5 > 2$	$5 > 3$	$5 > 4$
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der bulgarischen Marken	$5 < 24$	$5 < 23$	$5 < 22$	$5 < 21$
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Vierfachen der Anzahl der sowjetischen Marken	$24 > 4 \cdot 5 = 20$	$23 > 20$	$22 > 20$	$21 > 20$
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Fünffachen der Anzahl der sowjetischen Marken	$24 < 5 \cdot 5 = 25$	$23 < 25$	$22 < 25$	$21 < 25$

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Quellenverzeichnis

(13) "a+b = b+a" - Heft 52, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 5/6 - Dokumentation I.-XII. Olympiade (1961-1972), Mathematischer Lesebogen vom Rat des Stadtbezirks Leipzig Südost, Abteilung Volksbildung, J. Lehmann und W. Unze, 1973.