9. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1969/1970

Aufgaben und Lösungen

9. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 091241:

An einem internationalen Zeltlager nimmt eine Gruppe von 30 Freunden teil, von denen ein Teil Deutsch, ein Teil Russisch und ein Teil Französisch beherrschen, und zwar beherrschen einige Freunde nur eine Sprache, einige zwei Sprachen und einige sogar drei Sprachen.

Die Anzahl der Freunde, die genau zwei Sprachen beherrschen, ist mehr als doppelt so groß, jedoch weniger als dreimal so groß wie die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen. Die Anzahl der Teilnehmer, die alle drei Sprachen beherrschen, ist ebenso groß wie die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen.

Die Anzahl der Freunde, die nur Deutsch beherrschen, ist größer als die Anzahl derjenigen, die nur Russisch beherrschen, aber kleiner als die Anzahl derjenigen, die nur Französisch beherrschen. Die Anzahl derjenigen, die nur Deutsch beherrschen, ist kleiner als das Dreifache der Anzahl derjenigen, die nur Russisch beherrschen.

Geben Sie jeweils die Anzahl aller Teilnehmer dieser Gruppe an, die nur Deutsch, nur Russisch, nur Französisch, alle drei Sprachen beherrschen!

Aufgabe 091242:

Gegeben sei eine Gerade g und eine Strecke AB, die nicht in ein und derselben Ebene liegen. Unter allen Punkten C von g ist ein solcher zu finden, für den der Umfang des Dreiecks ΔABC möglichst klein ist.

Aufgabe 091243:

Es ist zu beweisen, daß für jedes ganzzahlige $n \geqslant 1$ die Funktion f mit

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \text{ höchstens eine reelle Nullstelle haben kann.}$$

Aufgabe 091244:

Die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks mit dem Mittelpunkt M seien der Reihe nach mit $P_1, P_2, \ldots, P_n$ bezeichnet.

a) Es ist zu beweisen: Die Strecken MP_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) können parallel zu sich selbst so verschoben werden, daß sie nach der Verschiebung die Seiten eines regelmäßigen n-Ecks bilden.

b) Es ist zu beweisen (z.B. mit Hilfe des Satzes unter a)), daß folgende Beziehungen für alle natürlichen Zahlen n größer als 2 gültig sind:

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2\pi n}{n} = 0 \qquad (1)$$

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2\pi n}{n} = 0 \qquad (2)$$

Aufgabe 091245:

Es sind alle reellen Zahlen λ anzugeben, für die die Gleichung

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda(\tan^4 x - \cot^4 x)$$

a) keine, b) genau eine, c) genau zwei, d) mehr als zwei

reelle Lösungen im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ hat.

Aufgabe 091246:

Es ist zu beweisen, daß für jedes Quadrupel positiver reeller Zahlen a, b, c, d die Beziehung

$$\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \leqslant \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}$$

gilt, und es ist zu untersuchen, in welchen Fällen Gleichheit eintritt.

9. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 091341:

Die Gruppe der 30 Teilnehmer teilt man in drei Untergruppen a, b und c ein, wobei die Gruppenmitglieder jeweils eine, zwei oder drei Sprachen sprechen. (Entsprechend müssen dann a, b und c natürliche Zahlen kleiner gleich 30 sein.) Damit ergeben sich aus dem Aufgabentext die folgenden Gleichungen und Ungleichungen unmittelbar

$$30 = a + b + c \tag{1}$$
$$a = c \tag{2}$$
$$2a < b < 3a \tag{3}$$

Setzt man nun (2) in (1) ein, so erhält man eine Gleichung für b

$$b = 30 - 2a,$$

mit der sich aus (3) ergibt

$$2a < 30 - 2a < 3a. \tag{4}$$

Betrachtet man nun die beiden Teile von (4) getrennt, so ergeben sich zwei Bedingungen für a

$$a < 7.5$$
$$6 < a$$

aus denen man unmitelbar

$$a = 7 \tag{5}$$

schlußfolgern kann.

Im zweiten Teil der Aufgabenstellung findet man noch Informationen über die Untergruppe der Teilnehmer, die nur eine Sprache sprechen

$$a = a_\mathrm{F} + a_\mathrm{D} + a_\mathrm{R} \tag{6}$$
$$a_\mathrm{F} > a_\mathrm{D} > a_\mathrm{R} \tag{7}$$
$$3a_\mathrm{R} > a_\mathrm{D} \tag{8}$$

wobei a_F, a_D und a_R für diejenigen Teilnehmer stehen, die nur Französisch, nur Deutsch und nur Russisch sprechen. Durch Einsetzen sieht man, daß sich die Bedingungen (6), (7) und (8) nur gleichzeitig erfüllen lassen für positive a_F, a_D und a_R, wenn

$$a_\mathrm{R} = 1 \tag{9}$$

gilt, womit aber unmittelbar

$$a_{\mathrm{F}} = 4 \tag{10}$$
$$a_{\mathrm{D}} = 2 \tag{11}$$

folgt.
Zum Abschluß seien die Ergebnisse (5), (9), (10) und (11) noch einmal in Worte gefaßt (wobei auch (2) verwendet wird): Es sprechen zwei Teilnehmer nur Deutsch, einer nur Russisch und vier nur Französisch. Alle drei Sprachen beherrschen sieben Teilnehmer. Die Probe bestätigt die Lösung, der Lösungsweg zeigt die Eindeutigkeit der gefundenen Lösung.

Aufgeschrieben und gelöst von Arnd Hübsch

Lösung 091342:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (12)

Lösung 091343:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (12)

Lösung 091344:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (12)

Lösung 091345:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (12)

Lösung 091346:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (12)

Quellenverzeichnis

(12) Buch: Neue Mathematik-Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1990, Aulis-Verlag