9. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Saison 1969/1970

Aufgaben und Lösungen

9. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 090911:

Auf der Siegerehrung einer Kreisolympiade wurde folgendes mitgeteilt:

Genau ein Neuntel aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade errangen einen Preis. Genau ein Zehntel aller Teilnehmer der Kreisolympiade sind Mitglieder des Kreisklubs Junge Mathematiker. Von den Preisträgern stammen genau 75 Prozent aus dem Kreisklub. Genau 6 derjenigen Schüler, die an der Kreisolympiade teilnahmen und Mitglieder des Kreisklubs sind, erhielten keinen Preis.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade!

Aufgabe 090912:

Aus je 12 geradlinigen Hölzern von je 1 dm Länge sollen die Ränder ebener Figuren gelegt werden, deren Flächeninhalte der Reihe nach

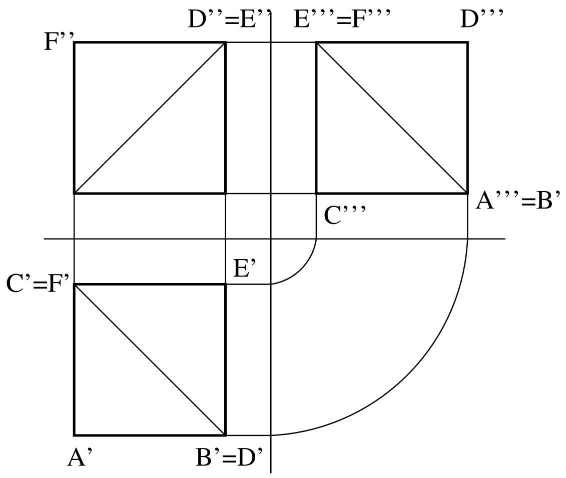
$$I_1 = 9\,\mathrm{dm}^2;\quad I_2 = 8\,\mathrm{dm}^2;\quad I_3 = 7\,\mathrm{dm}^2;\quad I_4 = 6\,\mathrm{dm}^2;\quad I_5 = 5\,\mathrm{dm}^2;\quad I_6 = 4\,\mathrm{dm}^2;\quad I_7 = 3\,\mathrm{dm}^2$$

groß sind. Dabei sollen in jedem Fall alle 12 Hölzer zur Herstellung der Berandung der betreffenden Figur gebraucht und keines geteilt oder geknickt werden; keine zwei Hölzer sollen (ganz oder teilweise) übereinanderliegen oder sich überkreuzen.

Geben Sie für jeden Fall eine Lösung an!

Aufgabe 090913:

In der Abbildung ist ein konvexer, durch ebene Flächen begrenzter Körper im Grund-, Auf- und Seitenriß dargestellt.



Ein durch ebene Flächen begrenzter Körper K heißt konvex, wenn für jede seiner Begrenzungsflächen F gilt: Ist ε die Ebene, in der F liegt, so befindet sich K ganz in einem der beiden Halbräume, in die der Raum durch ε zerlegt wird.

Die Umrisse des dargestellten Körpers sind im Grund-, Auf- und Seitenriß Quadrate mit der Seitenlänge a.

Bauen oder beschreiben Sie einen solchen Körper, und berechnen Sie sein Volumen!

Aufgabe 090914:

Als erste Quersumme einer natürlichen Zahl z sei die in üblicher Weise gebildete Quersumme verstanden. Ist die erste Quersumme von z eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so sei ihre Quersumme als die zweite Quersumme von z bezeichnet.

Beispiele: Die erste Quersumme von 98 ist $9+8=17$, die zweite Quersumme von 98 ist $1+7=8$. Die erste Quersumme von 43 ist $4+3=7$, eine zweite Quersumme von 43 wird nicht erklärt.

Ist die zweite Quersumme von z eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so heiße deren Quersumme die dritte Quersumme von z. In entsprechender Weise werden gegebenenfalls höhere Quersummen erklärt.

a) Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 10 bis 1 000, für die keine zweite Quersumme erklärt ist!

b) Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 10 bis 1 000, für die die zweite, aber nicht die dritte Quersumme erklärt ist!

c) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl, für die eine vierte Quersumme erklärt ist!

9. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 090911:

$T :=$ alle Teilnehmer der Kreisolympiade

I. $\frac{1}{9}$ der Teilnehmer sind Preisträger
75%, also $\frac{3}{4}$ der Preisträger sind Klubmitglieder
$\Rightarrow$ Anteil der Klubmitglieder, die einen Preis erhalten: $\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} \cdot T = \frac{1}{12} \cdot T$
Ein Zwölftel der Teilnehmer sind also sowohl Preisträger als auch Klubmitglieder.

II. Die Summe der Klubmitglieder die einen Preis erhalten ($\frac{1}{12} \cdot T$) und derer die keinen Preis erhalten (6 Stück) ist $\frac{1}{10}$ der Teilnehmer.

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \cdot T + 6 &= \frac{1}{10} \cdot T \\ 6 &= \frac{1}{10} \cdot T - \frac{1}{12} \cdot T \\ 6 &= \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12} \right) T \\ 6 &= \frac{1}{60} \cdot T \\ T &= 6 \cdot 60 \\ T &= 360 \end{aligned}$$

Die Anzahl der Teilnehmer an der Kreisolympiade beträgt 360.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Julia Erhard

Lösung 090912:

Um einfache mögliche Lösungen zu finden, von denen es unendlich viele gibt, startet man am besten mit dem $3 \cdot 3$ Quadrat mit der Fläche 9 welches sich mit $4 \cdot 3$ Hölzern berandenlen läßt und dem rechtwinkligen Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5. Dann benötigt man noch die Idee des sukzessiven Einklappens von Ecken das die Berandungslänge nicht verändert, wohl aber die Fläche um jeweils eins verringert.

Aufgeschrieben von Rainer Sattler – Quelle: (0)

Lösung 090913:

Um die Lösung zu finden, ist es nützlich, sich den Körper einem Würfel einbeschrieben vorzustellen. Des weiteren liegen drei in der Projektion auf einer Geraden liegende Punkte im Original in einer Ebene (und wie man sich anhand der Abstände leicht klarmachen kann sogar auf Ecken). Die Flächendiagonalen machen nach erfolgreicher Bestimmung einiger Seitenbelegungen das Problem schnell eindeutig.

Das Volumen des nichtregulären Oktaeders ist das zweier vierseitiger Pyramiden über der Fläche $a \cdot \sqrt{2} \cdot a$ mit den Höhen der halben Flächendiagonalen also $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot a \cdot \sqrt{2}a = \frac{2}{3} \cdot a^3$.

Aufgeschrieben von Rainer Sattler – Quelle: (0)

Lösung 090914:

a) Damit die 2. Quersumme nicht erklärt ist, muß die 1. Quersumme kleiner als 10 sein. Betrachtet man nun alle Zahlen, die aus 3 Ziffern gebildet werden können (jeweils alle Ziffern von 0 bis 9), so sind damit auch alle ein- und zweistelligen Zahlen enthalten. Die folgenden Ziffern führen zu einer Quersumme von 0 bis 9:
{0,0,0}, ... {0,0,9} $\Rightarrow$ 10 Möglichkeiten {0,1,1}, ... {0,1,8} $\Rightarrow$ 8 Möglichkeiten
{0,2,2}, ... {0,2,7} $\Rightarrow$ 6 Möglichkeiten {0,3,3}, ... {0,3,6} $\Rightarrow$ 4 Möglichkeiten
{0,4,4}, ... {0,4,5} $\Rightarrow$ 2 Möglichkeiten {1,1,1}, ... {1,1,7} $\Rightarrow$ 7 Möglichkeiten
{1,2,2}, ... {1,2,6} $\Rightarrow$ 5 Möglichkeiten {1,3,3}, ... {1,3,5} $\Rightarrow$ 3 Möglichkeiten
{1,4,4} $\Rightarrow$ 1 Möglichkeit {2,2,2}, ... {2,2,5} $\Rightarrow$ 4 Möglichkeiten
{2,3,3}, ... {2,3,4} $\Rightarrow$ 2 Möglichkeiten {3,3,3} $\Rightarrow$ 1 Möglichkeit
Von diesen 53 Möglichkeiten gibt es 4 Varianten mit 3 gleichen Ziffern, 26 Varianten mit einem gleichen Ziffernpaar und 23 Varianten mit sämtlich unterschiedlichen Ziffern. Die Kombination aus unterschiedlichen Ziffern ergibt jeweils $6 = 3!$, also $23 \cdot 6 = 138$ verschiedene Zahlen; bei einem gleichen Zahlenpaar gibt es je $3 = 3!/2!$, also $26 \cdot 3 = 78$ Zahlen. Insgesamt erhält man somit (da 0 bis 9 nicht, 1000 dafür aber auch noch gezählt wird) die folgende Anzahl gesuchter Zahlen: $4+78+138-10+1 = 211$

b) 991 Zahlen werden überhaupt nur betrachtet. 211 bilden nur eine Quersumme. Also gibt es 991 - 211 = 780 Zahlen, die eine zweite Quersumme bilden. Es müssen nur noch die ausgeschlossen werden, die eine dritte Quersumme bilden. Die erste Quersumme kann maximal $27 = 9 + 9 + 9$ sein, d.h. die 2. Quersumme ist maximal 10 (genau dann, wenn die 1. Quersumme 19 ist). Und auch nur genau in diesen Fällen ist die 3. Quersumme erklärt. Wir müssen also alle die Zahlen ausschließen, deren 1. Quersumme 19 ist.

   Keine zweistellige Zahl hat als Quersumme 19. Die gesuchten Zahlen sind also sämtlich dreistellig. Die Ziffern der gesuchten Zahlen bestehen aus folgenden Kombinationen und deren Vertauschungen: {9,9,1}, {9,8,2}, {9,7,3}, {9,6,4}, {9,5,5}, {8,8,3}, {8,7,4}, {8,6,5}, {7,7,5}, {7,6,6}. Unter diesen 10 Möglichkeiten gibt es je 5 mit verschiedenen Ziffern und mit einem gleichen Ziffernpaar. Damit ergeben sich analog zu a) die daraus zu bildenden Zahlen: $5 \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 30 + 15 = 45$ verschiedene Zahlen mit 3. Quersumme.

   Die Summe der Zahlen, die eine 2. aber keine 3.Quersumme bilden ist also 780 - 45 = 735

c) Die kleinste natürliche Zahl, für die eine vierte Quersumme erklärt ist, lautet: 19.999.999.999.999.999.999.999

   Es gibt keine kleinere, da die Quersumme möglichst gering gehalten werden muss, damit auch die Zahl möglichst klein bleibt. Die kleinste 2.Quersumme kann nur 19 sein, da sie die kleinste 2-stellige Zahl ist, die wieder eine 2-stellige Quersumme hat. Also muss die 1.Quersumme selbst eine Quersumme von 19 haben, wobei wiederum keine kleinere Zahl als 199 dies erfüllen kann. Die 1.Quersumme wird durch Addition aller Ziffern der Zahl gebildet. Die kleinste Zahl, die diese Quersumme bilden kann hat also möglichst wenig Stellen, d.h. von rechts her sind möglichst viele 9er aufzufüllen. Dies führt zu einer Zahl mit 1 beginnend und 22 Neunen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Julia Erhard

Quellenverzeichnis

(0) Unbekannt