9. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1969/1970

Aufgaben und Lösungen

9. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 090721:

Vater und Sohn gehen nebeneinander. In der gleichen Zeit, in der der Vater 4 Schritte macht, macht der Sohn jedesmal 5 Schritte, und in dieser Zeit legen beide jedesmal genau den gleichen Weg zurück. Die durchschnittliche Schrittlänge des Vaters beträgt 80 cm.

a) Wie groß ist die durchschnittliche Schrittlänge des Sohnes?

b) Wir nehmen an, daß beide gleichzeitig mit dem rechten Fuß beginnen. Nach dem wievielten Schritt des Vaters treten beide erstmalig gleichzeitig mit dem linken Fuß auf?

Aufgabe 090722:

Wir wollen eine Ecke eines Dreiecks "ausgezeichnet" nennen, wenn bei dieser Ecke Innen- und Außenwinkel einander gleich sind.

Ermittle die größtmögliche Anzahl "ausgezeichneter" Ecken, die in einem Dreieck auftreten können!

Aufgabe 090723:

Ein Tourist war an drei aufeinanderfolgenden Tagen jeweils genau die gleiche Zeit unterwegs.

Am ersten Tag ging er zu Fuß mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 6 km/h. Am zweiten Tag benutzte er ein Moped mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 km/h. Am dritten Tag benutzte er ein Auto mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h. Der an den drei Tagen zurückgelegte Gesamtweg betrug 520 km.

Ermittle die Zeit, die er an jedem einzelnen der Tage unterwegs war, und die Anzahl der am ersten, zweiten bzw. dritten Tage zurückgelegten Kilometer!

Aufgabe 090724:

Gegeben sei ein Dreieck ΔABC. Es sei g die Gerade durch den Punkt A und den Mittelpunkt der Seite BC.

Beweise, daß dann die Punkte B und C von der Geraden g den gleichen Abstand haben!

9. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 090721:

a) Mit 4 Schritten legt der Vater 320 cm zurück; denn $4 \cdot 80\,\text{cm} = 320\,\text{cm}$. Da der Sohn für die gleiche Strecke 5 Schritte braucht, beträgt wegen $320 : 5 = 64$ seine durchschnittliche Schrittlänge 64 cm.

b) Genau dann, wenn der Vater ein (positives ganzzahliges) Vielfaches von 4 als Schrittzahl beendet hat, hat der Sohn gleichzeitig mit dem Vater eine ganzzahlige Schrittzahl beendet, treten also Vater und Sohn gleichzeitig auf. Dies geschieht genau dann mit dem linken Fuß, wenn sie eine gerade Anzahl von Schritten beendet haben. Bei dem Vater ist dies für jedes Vielfache von 4 der Fall, bei dem Sohn genau für alle geradzahligen Vielfachen von 5. Das kleinste (positive) geradzahlige Vielfache von 5 ist aber das Zweifache.

   Daher treten Vater und Sohn erstmalig nach dem 8. Schritt des Vaters gleichzeitig mit dem linken Fuß auf.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 090722:

Da die Summe je eines Innenwinkels und eines zugehörigen Außenwinkels 180° beträgt, ist eine Ecke genau dann "ausgezeichnet", wenn der Innenwinkel bei dieser Ecke 90° beträgt.

Nun gibt es Dreiecke mit genau einem rechten Innenwinkel, aber es gibt keine Dreiecke mit mehr als einem solchen. Daher ist die einzige und mithin auch größte mögliche Anzahl 1.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 090723:

Die an den einzelnen Tagen zurückgelegten Wege sind proportional den jeweiligen Durchschnittsgeschwindigkeiten. Der am zweiten bzw. dritten Tag zurückgelegte Weg ist also das 5- bzw. 10fache des am ersten Tag zurückgelegten Weges.

Wegen $1 + 5 + 10 = 16$ ist somit der Gesamtweg, nach Aufgabenstellung 520 km, das 16fache des am ersten Tage zurückgelegten Weges. Dies ist nur möglich, wenn der am ersten Tage zurückgelegte Weg $520\,\text{km} : 16 = 32,5\,\text{km}$ und folglich der am zweiten bzw. dritten Tage zurückgelegte Weg $5 \cdot 32,5\,\text{km} = 162,5\,\text{km}$ bzw. $10 \cdot 32,5\,\text{km} = 325\,\text{km}$ betrugen.

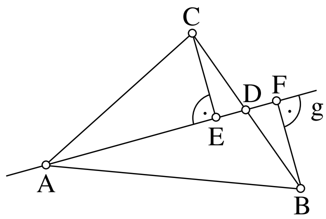
Daraus ergibt sich wegen $\frac{32,5}{6} = \frac{65}{12} = 5\frac{25}{60}$ die am ersten Tage (und nach Aufgabenstellung an jedem der drei Tage) aufgewendete Zeit als $\frac{65}{12}$ h (= 5 h 25 min).

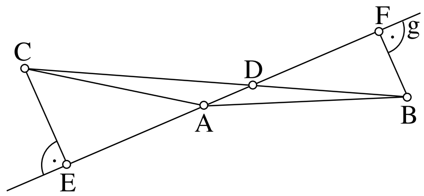
Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 090724:

Der Mittelpunkt der Seite BC sei D, das Lot von C bzw. von B auf g sei CE bzw. BF.

Fällt E mit D zusammen, dann fällt auch F mit D zusammen, und es gilt $\overline{AD} \perp \overline{CB}$ und damit wegen $\overline{CE} = \overline{CD}$ und $\overline{BF} = \overline{BD}$ auch $\overline{CE} = \overline{BF}$. Fällt E nicht mit D zusammen, so fällt auch F nicht mit D zusammen.





Dann stimmen die Dreiecke ΔCDE und ΔBDF in den Seitenlängen $\overline{CD}$, $\overline{BD}$, den Größen der anliegenden Winkel $\sphericalangle CDE$, $\sphericalangle BDF$ (Scheitelwinkel) und denen der gegenüberliegenden (rechten) Winkel $\sphericalangle CED$, $\sphericalangle BFD$ überein.

Also gilt $\Delta CDE \simeq \Delta BFD$, und daraus folgt $\overline{CE} = \overline{BF}$. $\square$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.