9. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Saison 1969/1970

Aufgaben und Lösungen

9. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 090621:

Klaus nahm als Mitglied der Sektion Radsport einer Betriebssportgemeinschaft an einem Bahnrennen teil. Nach dem Rennen wurde Klaus von seinem Bruder Reiner nach dem Ausgang des Rennens gefragt. Klaus sagte:

"Als ich den Zielstrich überfuhr, war kein Fahrer neben mir; genau ein Drittel der beteiligten Fahrer hatte das Ziel schon erreicht, und genau die Hälfte aller Teilnehmer lag noch hinter mir."

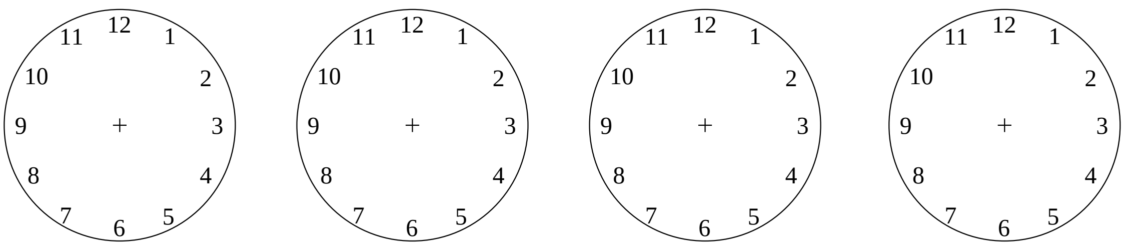
Gib an, welchen Platz Klaus in diesem Rennen belegte und wieviel Fahrer insgesamt an dem Rennen teilnahmen!

Aufgabe 090622:

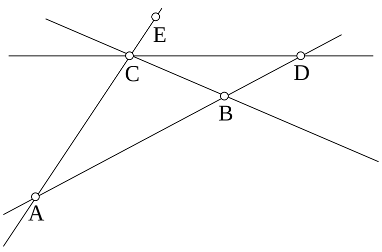
Auf der Abbildung sind wie auf dem Ziffernblatt einer Uhr die Zahlen 1 bis 12 abgebildet.

Untersuche, ob sich diese vier Kreisscheiben durch Einzeichnen von Linien (z.B. Geraden), die keine der Ziffern treffen, so in Teilstücke zerlegen lassen, daß die Summen der auf jedem Teilstück derselben Kreisscheibe liegenden Zahlen jeweils untereinander gleich sind!

Dabei ist die erste Kreisscheibe in 2 Teile, die zweite in 3 Teile, die dritte in 4 Teile und die vierte in 6 Teile zu zerlegen.



Aufgabe 090623:



Die Abbildung zeigt drei verschiedene Geraden durch einen Punkt C und eine vierte Gerade, die nicht durch C geht. Diese möge die drei erstgenannten Geraden in den Punkten A, B bzw. D schneiden, wobei B zwischen A und D liegen möge, Punkt E liege auf der Geraden durch A und C so, daß C zwischen A und E liegt.

Ferner gelte $\sphericalangle ECD \approx \sphericalangle ABC$.

Beweise, daß $\sphericalangle BCD \approx \sphericalangle BAC$ ist!

Aufgabe 090624:

Jürgen und seine jüngere Schwester Elke haben den gleichen Schulweg. Elke braucht vom Elternhaus bis zum Schultor genau 30 Minuten, Jürgen genau 20 Minuten. An einem Tage ging Elke genau 5 Minuten vor Jürgen aus dem Haus.

Nach wieviel Minuten holte Jürgen seine Schwester ein? (Es sei angenommen, daß jeder von beiden mit gleichbleibender Geschwindigkeit ging.)

9. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 090621:

Da genau ein Drittel der Fahrer (die Anzahl der Fahrer sei z) vor und $\frac{1}{2}z$ hinter Klaus lag, ist die Summe aus einem Drittel, der Hälfte und eins (nämlich Klaus selbst) gleich der Gesamtfahrerzahl z:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{3}z + 1 + \frac{1}{2}z \\ z &= \frac{2z + 6 + 3z}{6} \\ 6z - 5z &= 6 \\ z &= 6. \end{aligned}$$

An dem Radrennen nahmen folglich 6 Sportler teil. Davon waren vor Klaus 2, d.h. Klaus wurde Dritter - und nach Klaus kamen drei weitere Fahrer ins Ziel.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 090622:

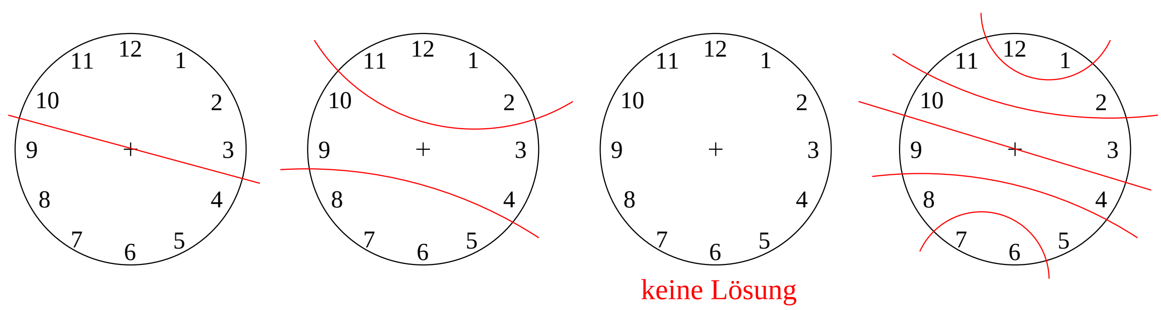
Zunächst wird die Summe aller Zahlen auf der Uhr ermittelt, dies ist:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78$$

Da 78 durch 2, 3 und 6 teilbar ist, sind die drei Fälle der Einteilung des Ziffernblattes in 2, 3 und 6 Abschnitte mit gleicher Summe aller Zahlen des Abschnittes zumindest theoretisch möglich. Ob es tatsächlich realisierbar ist, muß separat untersucht werden.

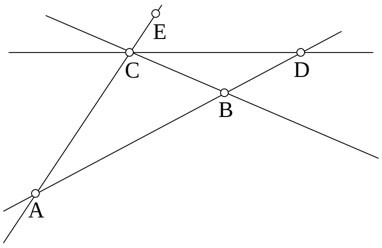
Der dritte Fall als Aufteilung in 4 Bereiche hingegen ist nicht möglich, da sonst in jedem Bereich eine Summe von $\frac{78}{4} = 19,5$ entstehen müßte, was mit natürlichen Zahlen von 1 bis 12 nicht durchführbar ist.

Die Lösungen sind in folgender Abbildung gegeben:



Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 090623:



Die Winkel seien wie in der Abbildung bezeichnet: $\alpha = \sphericalangle ECD = \sphericalangle ABC$ sowie $\beta = \sphericalangle BCD$, $\gamma = \sphericalangle BAC$ und $\delta = \sphericalangle ACB$. Damit gilt mit dem Innenwinkelsummensatz im Dreieck ΔABC:

$$\begin{aligned} \alpha + \delta + \gamma &= 180^\circ \\ \delta &= 180^\circ - \alpha - \gamma. \end{aligned}$$

Für den Winkel an C gilt:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \delta &= 180^\circ \\ \delta &= 180^\circ - \alpha - \beta. \end{aligned}$$

Setzt man nun beide Gleichungen ineinander ein, erhält man

$$180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

Es ergibt sich damit die Behauptung: $\beta = \gamma$ bzw. $\sphericalangle BCD \approx \sphericalangle BAC$.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 090624:

Wenn s die Weglänge zwischen Elternhaus und Schultor ist, läuft Elke mit einer Geschwindigkeit von $\frac{s}{30}$ pro Minute. Ihr Bruder läuft mit einer Geschwindigkeit von $\frac{s}{20}$ pro Minute.

Elke hat an besagtem Morgen in den ersten 5 Minuten einen Weg von $\frac{5s}{30}$ zurückgelegt als ihr Bruder losgeht. Beide Kinder treffen sich nach einer Strecke t und weiteren x Minuten.

Dann gilt für Elke:

$$t = \frac{5s}{30} + \frac{s \cdot x}{30}$$

und für Jürgen:

$$t = \frac{s \cdot x}{20}$$

Nun müssen beide Gleichungen noch ineinander eingesetzt werden, und man erhält x:

$$\begin{aligned} \frac{5s}{30} + \frac{s \cdot x}{30} &= \frac{s \cdot x}{20} \\ 20 \cdot 5s + 20 \cdot s \cdot x &= 30 \cdot s \cdot x \\ 100 + 20x &= 30x \\ 10x &= 100 \\ x &= 10 \\ t &= \frac{s}{2}. \end{aligned}$$

Jürgen holte seine Schwester nach 10 Minuten ein. Dabei hatten beide bereits den halben Weg zur Schule zurückgelegt.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel