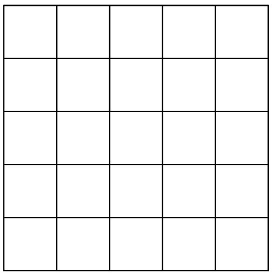
# 9. Mathematik Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 5
# Saison 1969/1970

Aufgaben und Lösungen

# 9. Mathematik-Olympiade
## 1. Stufe (Schulolympiade)
## Klasse 5
## Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

### Aufgabe 090511:



Gib eine Möglichkeit an, die Ziffern 1; 2; 3; 4 und 5 so in das gegebene quadratische Netz einzutragen, daß in jeder Zeile, jeder Spalte und in jeder der beiden Hauptdiagonalen jede der 5 Ziffern genau einmal vorkommt!

*Anmerkung:* Es genügt ein Beispiel. Begründungen werden nicht verlangt.

### Aufgabe 090512:

In einer Mathematikarbeitsgemeinschaft wurde die folgende Aufgabe aus einem sowjetischen Lehrbuch gestellt:

Wassja kaufte zwei Alben für Briefmarken. Kolja fragte ihn, wieviel er dafür bezahlt habe. "Ich verwendete zur Bezahlung nur Geldstücke einer Sorte", antwortete Wassja, "und zwar für das eine Album genau 7, für das andere genau 5. Für beide Alben bezahlte ich insgesamt 60 Kopeken."

(In der Sowjetunion gibt es 1-, 2-, 3-, 5-, 10-, 15-, 20- und 50-Kopekenstücke und keine anderen Sorten von Kopekenstücken.)

Wieviel Kopeken kostete das eine und wieviel das andere Album?

### Aufgabe 090513:

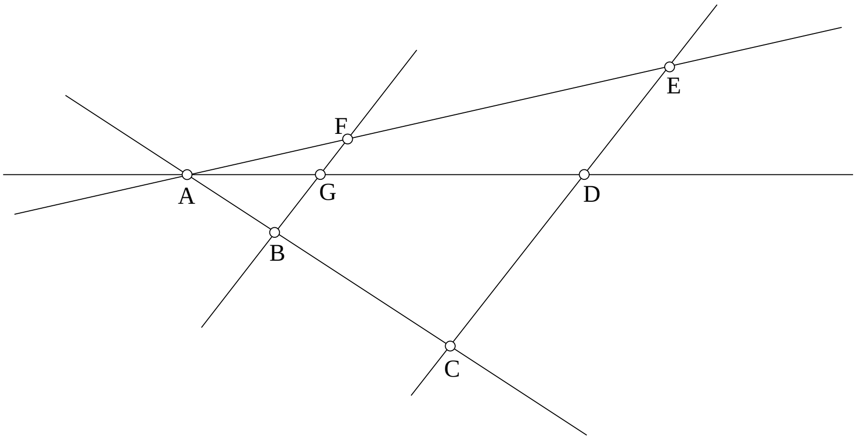
Die Abbildung zeigt genau 7 Punkte $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ und genau 5 Geraden, von denen eine durch $A$, $B$, $C$, eine durch $A$, $F$, $E$, eine durch $A$, $G$, $D$, eine durch $B$, $G$, $F$ und eine durch $C$, $D$, $E$ geht. Außerdem gilt $BF \parallel CE$.

Wir wollen sagen $\left\{\begin{array}{c}\text{eine Strecke}\\ \text{ein Dreieck}\\ \text{ein Trapez}\end{array}\right\}$ "gehört der Zeichnung an", wenn $\left\{\begin{array}{c}\text{ihre Endpunkte zwei}\\ \text{seine Eckpunkte drei}\\ \text{seine Eckpunkte vier}\end{array}\right\}$ der Punkte $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ sind und wenn $\left\{\begin{array}{c}\text{die Strecke}\\ \text{alle Seiten des Dreiecks}\\ \text{alle Seiten des Trapezes}\end{array}\right\}$ schon vollständig gezeichnet in der Abbildung $\left\{\begin{array}{c}\text{vorkommt}\\ \text{vorkommen}\\ \text{vorkommen.}\end{array}\right\}$

*Beispiele:* Die Strecke $AB$, das Dreieck $\Delta ABF$ "gehören der Zeichnung an". Die Strecke $BD$ "gehört der

Zeichnung" nicht "an", auch nicht die Strecke, die den Mittelpunkt von $AB$ mit $B$ verbindet, auch nicht das Dreieck $\Delta ABD$.

Gib alle Strecken, Dreiecke und Trapeze an, die "der Zeichnung angehören"!




Aufgabe 090514:

Im Werkunterricht fertigen Schüler Bauklötze an, die die Form von Quadern besitzen, und zwar sind bei jedem Bauklotz je drei in verschiedenen Richtungen verlaufende Seitenkanten 55 mm, 55 mm und 70 mm lang.

Zur besseren Aufbewahrung werden diese Bauklötze in quaderförmige Baukästen (mit Schiebedeckel) gepackt, deren Innenmaße (in den drei Richtungen der Seitenkanten gemessen) $0,33\,\mathrm{m}$, $2,2\,\mathrm{dm}$ und $21\,\mathrm{cm}$ betragen.

Berechne die größtmögliche Anzahl von Bauklötzen, die in sechs dieser Baukästen eingeschichtet werden können!

# 9. Mathematik-Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 5
# Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 090511:

Eine Lösungsmöglichkeit ist folgende:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 2 | 1 | 5 | 3 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 5 | 4 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 1 | 5 |

*Anmerkung:* Dabei erweist es sich bei der Lösungsfindung als sinnvoll, wenn zunächst die beiden Hauptdiagonalen so besetzt werden, daß sie der Aufgabenstellung entsprechen. Danach sollten die restlichen gleichen Ziffern in die freien Felder gefüllt werden, daß sich keine Widersprüche ergeben, bspw. zuerst alle Einsen, dann alle Zweien u.s.w. Mit etwas Glück und Fingerspitzengefühl kommt man so recht schnell zu einem Ergebnis.

*Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel*

Lösung 090512:

Wassjas Aussage kann man auch so aufschreiben, wenn die Sorte Kopeken für das erste Album mit $a$ und die zweite Sorte mit $b$ bezeichnet werden (wobei $a$, $b \in \{1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50\}$):

$$7a + 5b = 60$$

Nun werden die Reste betrachtet. 60 Kopeken wurden insgesamt bezahlt. Wenn man $5b$ abzieht, erhält man $7a$. Dabei ist, egal welchen Wert $b$ annimmt, die letzte Ziffer immer 5 oder 0. Entsprechend muß auch $7a$ auf 0 oder 5 enden. Von den vorgegebenen Kopekensorten erfüllt dies nur 5, 10, 15, 20, 50, wobei nur $7 \cdot 5 = 35 < 60$ sind. Schon bei 10-Kopekenstücken überschreitet man diesen Betrag. Damit muß das erste Album 35 Kopeken gekostet haben und entsprechend das 2. Album $60 - 35 = 25$ Kopeken gekostet haben. Das erste Album wurde mit 7 x 5-Kopekenstücken bezahlt, während das zweite Album mit 5 x 5 Kopekenstücken bezahlt wurde.

*Anmerkung:* Aus dieser Betrachtung folgt, daß alle Alben mit derselben Sorte Kopekenstücke bezahlt wurde und folglich die Aufgabenstellung auch dahingehend hätte interpretiert worden sein können. An der Stelle mit der vereinfachten Annahme aller gleichen Kopekenstücke hätte man sogar sagen können, insgesamt wurden $5 + 7 = 12$ Stücke verwendet; $60 : 12 = 5$, was sofort zur Lösung führt. Laut Musterlösung gilt die vereinfachte Annahme als Aufgabenstellung.

*Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel*

Lösung 090513:
Die Strecken, die "zur Zeichnung gehören", sind folgende:

$$AB, AC, AG, AD, AF, AE, BC, BG, BF, CD, CE, GF, GD, DE, FE.$$

Die Dreiecke, die "zur Zeichnung gehören", sind folgende:

$$\Delta ABG, \Delta ABF, \Delta AGF, \Delta ACD, \Delta ADE, \Delta ACE.$$

Die Trapeze, die "zur Zeichnung gehören", sind folgende:

$$BCDG, BCEF, GDEF.$$

*Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel*

Lösung 090514:
Zunächst wird die theoretisch maximal einzuschichtende Menge Bauklötze über das Verhältnis der Volumina ermittelt, wobei dies nichts mit den tatsächlichen Maßen zu tun haben muß, da die Größen "ungünstig gelegen" sein können.

Das Volumen der Aufbewahrungsbox beträgt:

$$V_{Box} = 33 \text{ cm} \cdot 22 \text{ cm} \cdot 21 \text{ cm} = 15246 \text{ cm}^3.$$

Das Volumen eines Bauklotzes beträgt:

$$V_{Klotz} = 5,5 \text{ cm} \cdot 5,5 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = 211,75 \text{ cm}^3.$$

Setzt man diese Volumina nun ins Verhältnis, erhält man das Ergebnis, daß $15246 : 211,75 = 72$ Bauklötze -theoretisch- lückenlos in einer Box untergebracht werden können. Nun muß noch geprüft werden, ob dies mit den gegebenen Maßen tatsächlich erreicht werden kann:

Denkt man sich eine Fläche aus 6 x 4 Bauklötzen, so belegen sie eine Länge von $6 \cdot 5,5 \text{ cm} = 33 \text{ cm}$ und eine Breite von $4 \cdot 5,5 \text{ cm} = 22 \text{ cm}$, was der Grundfläche der Box entspricht. Dieser neue Körper aus den Bauklötzen bedeckt die Box-Grundfläche lückenlos und hat eine Höhe von 7 cm. Schichtet man nun 3 solche Ebenen aus 6 x 4 Bauklötzen übereinander, erhält man eine Höhe von $3 \cdot 7 \text{ cm} = 21$ cm, was wiederum exakt der Höhe der Box entspricht, d.h. $6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$ Bauklötze können lückenlos in die Box gestapelt werden.

*Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel*