8. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1968/1969

Aufgaben und Lösungen

8. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 081211:

Bei den Europameisterschaften der Ruderinnen im August 1966 erhielten in der Länderwertung die DDR als erfolgreichstes Land, 37 Punkte und die UdSSR 36,5 Punkte. Beide Länder erhielten in jeder der 5 Disziplinen Einer, Doppelzweier, "Vierer mit", Doppelvierer und Achter genau je eine der drei pro Disziplin vergebenen Medaillen.

Wieviel Goldmedaillen, wieviel Silbermedaillen und wieviel Bronzemedaillen erhielt jedes der beiden Länder?

Die Punktbewertung ergibt sich aus der folgenden Tabelle.

	Goldmedaille	Silbermedaille	Bronzemedaille
Einer bzw. Doppelzweier	6	5	4
"Vierer mit" bzw. Doppelvierer	9	7,5	6
Achter	12	10	8

Es ist ferner bekannt, daß die DDR beim Doppelzweier besser als beim Einer und beim Doppelvierer besser als beim "Vierer mit" abschloß. Die UdSSR schnitt beim Einer besser als beim Doppelzweier ab.

Aufgabe 081212:

a) Auf den Seiten AB, BC und CA des Dreiecks ΔABC liegen die von den Eckpunkten und paarweise untereinander verschiedenen Punkte A_1, A_2, A_3 bzw. B_1, B_2, B_3, B_4 bzw. C_1, C_2, C_3, C_4, C_5.

   Geben Sie die Anzahl aller Dreiecke an, die aus allen diesen Punkten (einschließlich der Eckpunkte A, B, C) gebildet werden können! Zwei Dreiecke gelten genau dann als gleich, wenn jede Ecke des einen Dreiecks auch Ecke des anderen ist.

b) Geben Sie die Anzahl aller verschiedenen Dreiecke an, wenn es sich entsprechend um die Punkte A_1, ..., A_k bzw. B_1, ..., B_m bzw. C_1, ..., C_n handelt (k, m, n gegebene natürliche Zahlen)!

Aufgabe 081213:

In einem regelmäßigen Tetraeder $ABCD$ schneiden sich die Höhen in einem Punkt S.

Berechnen Sie die Größe α des Winkels $\sphericalangle CSD$!

Aufgabe 081214:

Quadratwurzeln berechnet man häufig mit der folgenden Näherungsformel:

$$\sqrt{a^2+b} \simeq a + \frac{b}{2a}.$$

Dabei sind a und b positive reelle Zahlen.

a) Es ist zu beweisen, daß für den Fehler $\delta = a + \frac{b}{2a} - \sqrt{a^2+b}$ dieses Näherungswertes stets $0 < \delta < \frac{b^2}{8a^3}$ gilt.

b) Stellen Sie eine analoge Näherungsformel für $\sqrt[3]{a^3+b}$ auf, und geben Sie eine Abschätzung für den Fehler!

Bei der praktischen Anwendung wird b relativ klein gewählt. Wie läßt sich die Abschätzung vereinfachen, wenn man etwa a, b ganzzahlig voraussetzt, und zwar so, daß $a^3 + b$ zwischen den Kubikzahlen a^3 und $(a+1)^3$ liegt?

c) Berechnen Sie mit Hilfe der obigen Formeln Näherungswerte für $\sqrt{56}$ und $\sqrt[3]{80}$!

8. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 081311:

Die UdSSR hat 36,5 Punkte; sie muss also bei mindestens einer Disziplin eine Medaille erhalten haben, deren Punktzahl nicht ganzzahlig ist. Dies ist nur der Fall bei den Silbermedaillen im "Vierer mit" und im "Doppelvierer".

Da es nur zwei solcher Medaillen gibt, kann die DDR nun nur noch maximal eine davon erhalten haben. Das würde jedoch zu einer nicht-ganzzahligen Gesamtpunktzahl führen, die DDR hat aber 36 Punkte. In den Disziplinen "Vierer mit" und "Doppelvierer" ist für sie nur noch möglich, eine Gold- oder eine Bronzemedaille zu erhalten. Da bekannt ist, dass die DDR beim "Doppelvierer" besser als beim "Vierer mit" abschnitt, erhielt sie folglich beim "Vierer mit" die Bronze- und beim Doppelvierer die Goldmedaille.

Hier erhielt die DDR also $9 + 6 = 15$ Punkte. Sie erhielt also in den restlichen drei Disziplinen insgesamt $37 - 15 = 22$ Punkte. Die maximale mögliche Punktzahl liegt hier mit drei Goldmedaillen bei $12+6+6 = 24$. Da die DDR im "Doppelzweier" besser war als beim "Einer", kann sie im "Einer" keine Goldmedaille, sondern maximal eine Silbermedaille erhalten haben, als Maximalpunktzahl ergibt sich folglich: $12+6+5 = 23$.

Da die DDR in den drei Disziplinen jedoch nur 22 Punkte hat, muss sie in (mindestens) einer Disziplin schlechter abgeschnitten haben als "Achter" Gold, "Doppelzweier" Gold, "Einer" Bronze. Bei "Achter" sind die Punktabstufungenen zwei Punkte, hier kann also nicht genau ein Punkt verloren werden. Es muss also "Doppelzweier" oder "Einer" genau eine Medaille schlechter sein. Wenn im "Doppelzweier" eine Silbermedaille erzielt würde, so wäre die DDR hier genauso gut gewesen wie im "Einer", da dies nicht der Fall ist, muss im "Einer" eine Bronzemedaille erzielt worden sein.

Es ergibt sich also für die DDR:
Einer: Bronze 4
Doppelzweier: Gold 6
Vierer mit: Bronze 6
Doppelvierer: Gold 9
Achter: Gold 12
Insgesamt: 3 Goldmedaillen, 2 Bronzemedaillen, 37 Punkte

Für die UdSSR sind nun noch, wenn man die Unmöglichkeit einer Goldmedaille in den Disziplinen, in denen die DDR diese bereits hat, berücksichtigt, maximal $6 + 5 + 9 + 7,5 + 10 = 37,5$ Punkte möglich. Da sie nur 36,5 Punkte hat und nur in den Disziplinen "Einer" und "Doppelzweier" die Punktabstufung 1 vorhanden ist, muss sie entweder im "Einer" oder im "Doppelzweier" genau eine Medaille schlechter gewesen sein. Hätte sie im "Einer" nur die Silbermedaille, so wäre sie hier genauso gut wie im "Doppelzweier", das ist aber nicht der Fall. Folglich hat die UdSSR im "Doppelzweier" die Bronzemedaille erhalten.

Es ergibt sich also für die UdSSR:
Einer: Gold 6
Doppelzweier: Bronze 4

Vierer mit: Gold 9
Doppelvierer: Silber 7,5
Achter: Silber 10
Insgesamt: 2 Goldmedaillen, 2 Silbermedaillen, 1 Bronzemedaille, 36,5 Punkte

Aufgeschrieben und gelöst von Annika Heckel

Lösung 081312:

Aus den gegebenen 15 Punkten lassen sich genau $\binom{15}{3}$ voneinander verschiedene Punkttripel bilden. Die Punkte eines jeden solchen Tripels sind genau dann die Ecken eines Dreiecks, wenn sie nicht auf ein und derselben Geraden liegen.

a) Im gegebenen Fall befinden sich jedoch genau 5 der Punkte auf BC, 6 auf CA und 7 auf AB. Aus diesen sind dabei jeweils $\binom{5}{3}$, $\binom{6}{3}$ bzw. $\binom{7}{3}$ der $\binom{15}{3}$ Tripel gebildet. Daher ist die gesuchte Anzahl Z der Dreiecke

$$Z = \binom{15}{3} - \binom{5}{3} - \binom{6}{3} - \binom{7}{3} = 390.$$

b) Auf Grund der gleichen Überlegungen erhält man jetzt

$$Z = \binom{k+m+n+3}{3} - \binom{k+2}{3} - \binom{m+2}{3} - \binom{n+2}{3}$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)

Lösung 081313:

Man fällt das Lot AM von A auf die Tetraederkante CD. Dann ist $AM \simeq BM$, da beide Strecken Höhen einer Seitenfläche ein und desselben regelmäßigen Tetraeders sind. Weiter ist mit $\alpha = |\sphericalangle ASB|$, wenn BQ Tetraederhöhe ist,

$$\alpha = 360° - 90° - 90° - |\sphericalangle QMB|,$$

also

$$\cos\alpha = \cos(180° - |\sphericalangle QMB|) = -\tfrac{QM}{MB} = -\tfrac{1}{3},$$

woraus $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ folgt. Zur Erinnerung eines Näherungswertes mit Hilfe einer Tafel benutze man die Relation $\alpha = 180° - \arccos\frac{1}{3}$. Man findet dann $\cos(70{,}6°) < \frac{1}{3} < \cos(70{,}5°)$, so daß $180° - 70{,}5° = 109{,}5°$ ein Näherungswert der geforderten Art ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)

Lösung 081314:

a) Es gilt:

$$\delta = \frac{\left(x + \frac{y}{2x}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+y}\right)^2}{x + \frac{y}{2x} + \sqrt{x^2+y}} = \frac{y^2}{4x^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{y}{2x} + x\sqrt{1+\frac{y}{x^2}}},$$

also $0 < \delta < \frac{y^2}{8x^3}$.

b) Entsprechend ergibt sich, wenn man $\sqrt[3]{x^2+y}$ durch $x+\frac{y}{3x^2}$ ersetzt, für den Fehler

$$\delta = x + \frac{y}{3x^2} - \sqrt[3]{x^3+y}$$

die Eingabelung

$$0 < \delta < \frac{x^2(9x^3+y)}{81x^8},$$

denn es gilt

$$\delta = \frac{\left(x+\frac{y}{3x^2}\right)^3 - (x^3+y)}{\left(x+\frac{y}{3x^2}\right)^2 + \left(x+\frac{y}{3x^2}\right)\sqrt[3]{x^3+y} + \left(\sqrt[3]{x^3+y}\right)^2} < \frac{(9x^3+y)y^2}{3x^2(3x^2)^3}.$$

c) $\sqrt{56} = \sqrt{49+7} = 7 + \frac{7}{2\cdot 7} - \delta = 7{,}5 - \delta$ mit $0 < \delta < \frac{49}{8\cdot 7^3} = \frac{1}{56}$, also $0 < \delta < 0{,}0179$. (Eine genauere Rechnung zeigt, daß $0 < \delta < 0{,}0167$ ist.)

$\sqrt[3]{80} = \sqrt[3]{64+16} = 4 + \frac{16}{3\cdot 16} - \delta = \frac{13}{3} - \delta$ mit $0 < \delta < \frac{16^2(9\cdot 64+16)}{81\cdot 4^8} = \frac{37}{16\cdot 81} < 0{,}029$. (Eine genauere Rechnung zeigt, daß $\delta < 0{,}025$ ist.)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)

Quellenverzeichnis

(12) Buch: Neue Mathematik-Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1990, Aulis-Verlag