7. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1967/1968

Aufgaben und Lösungen

7. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070721:

Einem gegebenen rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C ist ein Quadrat so einzubeschreiben, daß der rechte Winkel des Dreiecks zum Quadratwinkel wird und der ihm gegenüberliegende Eckpunkt des Quadrates auf der Hypotenuse AB des Dreiecks liegt.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Bedingungen ein Quadrat eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 070722:

Horst sagt zu Klaus: Nenne mir eine dreistellige natürliche Zahl, von deren Ziffern keine Null ist und keine zwei einander gleich sind! Notiere sie und schreibe darunter sämtliche dreistelligen Zahlen, die durch Umstellen der Ziffern der genannten Zahl entstehen können! Addiere alle diese Zahlen! Ehe Klaus fertig war, hatte Horst schon längst das Ergebnis im Kopf gefunden. Er rechnete: $2Q \cdot 111$, wobei Q die Quersumme der erstgenannten Zahl bedeutet.

Begründe sein Verfahren allgemein und gib dann ein Zahlenbeispiel!

Aufgabe 070723:

Gegeben ist ein Dreieck ΔABC. M sei der Mittelpunkt der Seite AC. Die Parallele zu der Seite AB durch den Punkt M schneide die Seite BC im Punkt N.

Beweise, daß N der Mittelpunkt der Seite BC ist!

Aufgabe 070724:

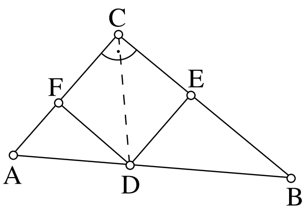
Auf einer Exkursion fuhren mit Autobussen genau 319 Schüler, auf einer anderen Exkursion genau 232. In jedem der Autobusse, die insgesamt dabei fuhren, saß genau die gleiche Anzahl Schüler.

Ermittle diese Anzahl! (Wir setzten dabei voraus, daß in jedem Autobus mehr als ein Schüler saß.)

7. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 070721:



Jede Diagonale eines Quadrates halbiert zwei gegenüberliegende Winkel des Quadrats. Deshalb konstruiert man die Winkelhalbierende des rechten Winkels $\sphericalangle ACB$. Sie schneidet die Seite AB im Punkt D. Dann ist die Strecke CD eine Diagonale des gesuchten Quadrats. Die Parallelen durch D zu AC und CB schneiden CB in E und AC in F. $DECF$ ist das gesuchte Quadrat.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 070722:

a, b, c seien natürliche Zahlen, die alle größer Null und kleiner oder gleich 9 sind. Dann heißen die dreistellige Zahl und die sich durch Umstellung Ihrer Ziffern ergebenden Zahlen:

$$\begin{array}{ll} 100a + 10b + c & 100a + 10c + b \\ 100b + 10a + c & 100b + 10c + a \\ 100c + 10a + b & 100c + 10b + a \end{array}$$

Die Summe s ist dann:

$$\begin{aligned} s &= 100(2a + 2b + 2c) + 10(2a + 2b + 2c) + (2a + 2b + 2c) \\ &= (100 + 10 + 1) \cdot (2a + 2b + 2c) = 111 \cdot 2 \cdot (a + b + c) \\ &= 111 \cdot 2Q. \end{aligned}$$

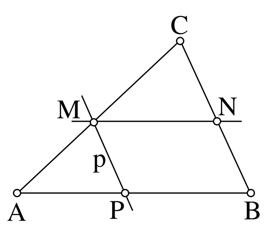
Beispiel: Die Zahl sei 534. Dann ist $2Q = 24$ und $2Q \cdot 111 = 24 \cdot 111 = 2664$ bzw. 534+ 543+ 354+ 345+ 453+435=2664.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 070723:

Die Parallele p zu BC durch M schneide AB in P. Daß diese Parallele p die Strecke AB tatsächlich schneidet, folgt so:

Durch p wird die Ebene, in der ΔABC liegt, in zwei Halbebenen zerlegt, in deren einer die Gerade durch B und C verläuft und in deren anderer A liegt, weil sonst AC nicht von p geschnitten würde. Daher schneidet p auch die Strecke AB.



Dann gilt:

(1) $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle MNC \simeq \sphericalangle APM$
$\sphericalangle CAB \simeq \sphericalangle CMN$ (als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen)

(2) $\Delta APM \simeq \Delta MNC$ (nach dem Kongruenzsatz sww).

Daraus folgt: $\overline{MP} = \overline{CN}$.

(3) Viereck $BNMP$ ist ein Parallelogramm (nach Konstruktion).

Aus (2) und (3) folgt die Behauptung.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 070724:

Die Anzahl der Schüler pro Autobus muß ein gemeinsamer Teiler > 1 von 319 und 232 sein. Wegen $319 = 11 \cdot 29$ und $232 = 8 \cdot 29$ ist die Primzahl 29 der einzige gemeinsame Teiler > 1 von 319 und 232; denn 11 und 8 sind teilerfremd. Daher fuhren in jedem Bus genau 29 Schüler.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.