7. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1967/1968

Aufgaben und Lösungen

7. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070711:

Bei einer Mathematikarbeit erzielten die 36 Schüler einer Klasse folgende Ergebnisse:

a) $\frac{5}{12}$ der Anzahl aller dieser Schüler erhielten eine Drei,

b) $\frac{2}{5}$ von der unter a) genannten Anzahl erreichte die Note Eins.

c) Die Anzahl der Vieren war ebenso groß wie die der Einsen.

d) Die Anzahl der Vieren betrug $\frac{3}{4}$ von der Anzahl der Zweien.

e) Die Anzahl der Fünfen ergibt sich aus a) bis d).

Gib die Zensurenverteilung bei dieser Mathematikarbeit an!

Aufgabe 070712:

Untersuche, ob man ein konvexes Sechseck zeichnen kann, bei dem genau vier Innenwinkel spitz sind!

Aufgabe 070713:

Gib sämtliche Geldbeträge bis zu 1 MDN an, die sich unter alleiniger Verwendung von Einpfennig-, Fünfpfennig- und Zehnpfennigstücken (wobei von jeder Sorte stets mindestens ein Stück zu nehmen ist) auszahlen lassen und bei denen der in Pfennig angegebene Geldbetrag genau doppelt so groß ist wie die benötigte Anzahl der Münzen!

Aufgabe 070714:

In einem Parallelogramm $ABCD$ sei $\sphericalangle DAB$ ein spitzer Winkel. Vom Punkt C wird das Lot auf die Gerade g_{AB} gefällt, sein Fußpunkt sei E. Man verbinde E mit dem Mittelpunkt F der Seite AD.

Beweise: Der Winkel $\sphericalangle EFD$ ist doppelt so groß wie der Winkel $\sphericalangle BEF$!

7. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 070711:

a) Genau 15 Schüler erhielten eine Drei; denn $\frac{5}{12} \cdot 36 = 15$.

b) Genau 6 Schüler erreichten die Note Eins; denn $\frac{2}{5} \cdot 15 = 6$.

c) Genau 6 Schüler erzielten eine Vier.

d) Genau 8 Schüler bekamen eine Zwei; denn $\frac{3}{4} \cdot 8 = 6$.

e) Genau 1 Schüler erhielt eine Fünf; denn $36 - (15 + 6 + 6 + 8) = 1$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 070712:
Das ist nicht möglich.

Beweis: Angenommen, vier Innenwinkel wären spitz, dann wäre deren Summe kleiner als 360° und - da die Winkelsumme im Sechseck 720° beträgt - die Summe der beiden übrigen größer als 360°. Das ist aber unmöglich, weil in jedem konvexen Vieleck jeder Innenwinkel kleiner als 180° ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 070713:
Bezeichnet man die Anzahl der Pfennigstücke mit x, die der Fünfpfennigstücke mit y und die der Zehnpfennigstücke mit z, dann gilt: $x + 5y + 10z = 2(x + y + z)$, woraus man $8z + 3y = x$ erhält.

z	$x = 3y + 8z$	y	Geldbetrag (in Pfennig)
1	11	1	26
	14	2	34
	17	3	42
	20	4	50
	23	5	58
	26	6	66
	29	7	74
	32	8	82

z	$x = 3y + 8z$	y	Geldbetrag (in Pfennig)
1	35	9	90
	38	10	98
2	19	1	44
	22	2	52
	25	3	60
	28	4	68
	31	5	76
	34	6	84
	37	7	92
	40	8	100
3	27	1	62
	30	2	70
	33	3	78
	36	4	86
	39	5	94
4	35	1	80
	38	2	88
	41	3	96
5	43	1	98

Da für alle $z \geq 6$ keine Lösungen unter den Bedingungen der Aufgabe existieren, gibt es also genau 26 derartige Geldbeträge, von denen genau 25 auf eine einzige Art und genau ein Geldbetrag (98 Pf) auf genau zwei Arten gemäß den erwähnten Bedingungen ausgezahlt werden kann.

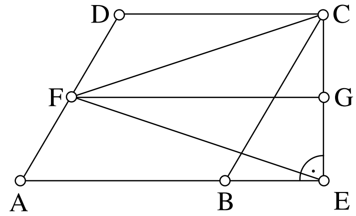
Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 070714:

Voraussetzung: Es gilt $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $\sphericalangle BEC$ ist ein rechter Winkel; $\overline{AF} = \overline{FD}$.

Behauptung: Der Winkel $\sphericalangle EFC$ ist doppelt so groß wie $\sphericalangle BEF$

Beweis: Da der Winkel $\sphericalangle DAB$ spitz ist, fällt Punkt E weder mit A noch mit B zusammen. Die Parallele zu AB durch F halbiert das Lot CE im Punkt G und steht senkrecht auf CE, d.h. F liegt auf der Mittelsenkrechten der Punkte C und E. Dann ist das Dreieck ΔEFC gleichschenklig mit $\overline{EF} = \overline{FC}$, und FG ist Winkelkalbierende in diesem Dreieck. Es ist also $\sphericalangle EFC$ doppelt so groB wie $\sphericalangle EFG$.



Nun gilt $\sphericalangle BEF \simeq \sphericalangle EFG$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Daraus folgt, daß $\sphericalangle EFC$ auch doppelt so groß wie $\sphericalangle BEF$ ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.