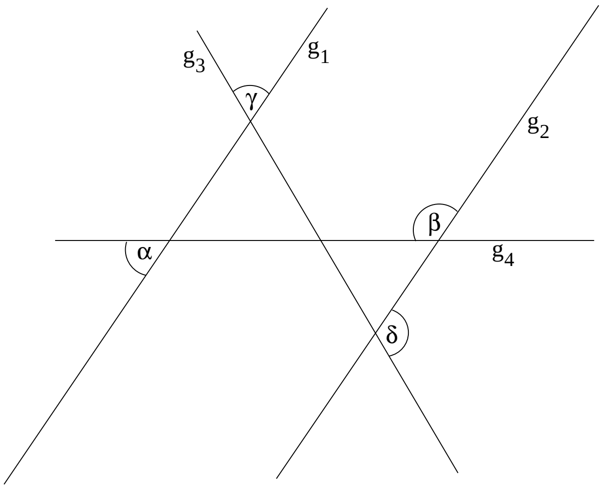
7. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Saison 1967/1968

Aufgaben und Lösungen

7. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070621:



Die Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 schneiden einander in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise. Von den Größen α, β, γ und δ der dadurch entstehenden Winkel sei

$$\alpha = 50°, \qquad \beta = 130°, \qquad \gamma = 70°.$$

Ermittle δ!

Aufgabe 070622:

Jedes der beiden Vorderräder eines Wagens hat einen Umfang von 210 cm, jedes der beiden Hinterräder einen Umfang von 330 cm.

Ermittle die kürzeste Strecke (in m), die der Wagen auf einer ebenen geraden Straße durchfahren haben muß, damit jedes seiner Räder genau eine ganze Anzahl von Umdrehungen durchgeführt hat!

Aufgabe 070623:

Nach einem Scheibenschießen verglichen Elke, Regina, Gerd und Joachim ihre Schießleistungen. Es ergab sich folgendes:

(1) Joachim erzielte mehr Ringe als Gerd.

(2) Elke und Regina erreichten zusammen dieselbe Ringzahl wie Joachim und Gerd zusammen.

(3) Elke und Joachim erzielten zusammen weniger Ringe als Regina und Gerd.

Ermittle auf Grund dieser Angaben die Reihenfolge der Schützen nach fallender Ringzahl!

Aufgabe 070624:

Von den Teilnehmern einer Schule eines Landkreises an der 1. Stufe der Mathematikolympiade wurden genau $\frac{3}{40}$ zur 2. Stufe delegiert. Von diesen Schülern erhielten bei der 2. Stufe (Kreisolympiade) genau $\frac{2}{9}$ Preise oder Anerkennungsschreiben.

Einen ersten Preis in seiner Klassenstufe erhielt genau ein Schüler, genau ein weiterer Schüler erhielt in seiner Klassenstufe einen zweiten Preis, genau zwei weitere bekamen dritte Preise. Außerdem wurden genau vier anderen Schülern dieser Schule für besonders gute Lösungen einer Aufgabe Anerkennungsschreiben überreicht.

Gib die Anzahl aller Teilnehmer dieser Schule an der 1. Stufe der Mathematikolympiade an!

7. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 070621:

Sei α' der Stufenwinkel zu α am Schnittpunkt der Geraden zwischen g_4 und g_2. Dann gilt: $\alpha' + \beta = 180°$ (Scheitelwinkel), und es ergibt sich für $\alpha' = 50°$. Damit ist $\alpha = \alpha'$. Aus der geltenden Umkehrung des Stufenwinkelsatzes kann nun geschlußfolgert werden, daß $g_1 \parallel g_2$ gilt.

Sei γ' der Stufenwinkel zu γ am Schnittpunkt der Geraden zwischen g_3 und g_2. Dann sind laut Stufenwinkelsatz an geschnittenen Parallelen ($g_1 \parallel g_2$) γ und γ' gleich groß.

Da δ der Scheitelwinkel zu γ' ist, gilt:

$$\delta = 180° - \gamma' = 180° - \gamma = 180° - 70° = 110°.$$

Der gesuchte Winkel δ ist 110° groß.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 070622:

Gesucht ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 210 cm und 330 cm. Dazu werden diese beiden Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegt:

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$

Das kgV ist also: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$. Das bedeutet, daß die kürzeste Strecke laut Aufgabenstellung $2310\,\text{cm} = 23{,}1\,\text{m}$ beträgt. Jedes Vorderrad legt dabei 11 und jedes Hinterrad 7 Umdrehungen zurück.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 070623:

Die Anzahl geschossener Ringe jeder Person werden durch die Anfangsbuchstaben ihres Namens repräsentiert. Dann gilt folgendes:

$$g < j \qquad (1)$$
$$e + r = j + g \qquad (2)$$
$$e + j < r + g \qquad (3)$$

Setzt man (2) in (3) ein, ergibt sich:

$$e + e + r - g < r + g$$
$$2e < 2g$$
$$e < g$$

Damit ist schon mit (1) $e < g < j$ bekannt.

Weiterhin mit (2): $r = j + g - e$. Da $g > e$ ist $g - e > 0$ und damit $r > j$.

Setzt man dies in die bereits gefundene Reihenfolge ein, erhält man die folgende Gesamtreihenfolge nach fallender Ringzahl:

$$\text{Regina} > \text{Joachim} > \text{Gerd} > \text{Elke}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 070624:
Es sei die gesuchte Anzahl der Teilnehmer der Schule an der 1. Stufe mit z bezeichnet. Dann nahmen an der 2. Stufe $\frac{3}{40}z$ Schüler teil. Preise oder Anerkennungen erhielten $\frac{2}{9}$ davon, also:

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{40}z = \frac{2 \cdot 3}{9 \cdot 40}z = \frac{1}{60}z$$

Dieses sind nun 1 mal ein 1. Preis, 1 mal ein 2. Preis, 2 mal ein 3. Preis und 4 mal Anerkennung, insgesamt also 8 Preise und Anerkennungen.

Diese Terme sind nun gleichzusetzen, und man erhält für z:

$$\begin{aligned} \frac{1}{60}z &= 8 \\ z &= 480 \end{aligned}$$

Es beteiligten sich also 480 Schüler dieser Schule an der 1. Stufe der Mathematikolympiade.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel