7. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 5
Saison 1967/1968

Aufgaben und Lösungen

7. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070521:

Die Schüler einer Klasse sammelten insgesamt 336 kg Altpapier. Aus 1 kg Altpapier stellt man in einer Papierfabrik genau 700 g reines weißes Papier her und aus je 30 g von diesem ein Schreibheft. (In der Produktion wird weißes Papier nicht unmittelbar aus Altpapier hergestellt. Durch Zusatz von Altpapier wird aber eine entsprechende Menge Rohstoff eingespart.)

Gib die größtmögliche Anzahl von Heften an, die aus dem gesammelten Altpapier hergestellt werden kann!

Aufgabe 070522:

Von einer zweistelligen Zahl z ist bekannt, daß die Einerziffer eine dreimal so große Zahl darstellt wie die Zehnerziffer. Vertauscht man die Ziffern, so entsteht eine Zahl, die um 36 größer als die ursprüngliche ist.

Wie lautet z im Dezimalsystem?

Aufgabe 070523:

Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ (siehe Abb.) mit folgenden Seitenlängen: $\overline{AB} = 6$ cm und $\overline{BC} = 2$ cm.

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das rechtwinklige Dreieck ΔDAD_1, bei dem der Punkt D_1 auf der Seite AB liegt und der Winkel $\sphericalangle D_1DA$ eine Größe von 45° hat!

Aufgabe 070524:

Nachdem der Mathematiklehrer sämtliche 4 Olympiadeaufgaben seiner 36 Schüler korrigiert und ausgewertet hatte, gab er den Mitgliedern seiner Arbeitsgemeinschaft die folgende Tabelle und führte dazu aus:

"Die Anzahl der Schüler, die keine Aufgabe richtig lösten, ist gleich der Anzahl derjenigen, die alle Aufgaben richtig lösten. Die Anzahl derjenigen, die nur 1 Aufgabe richtig bewältigten, ist doppelt so groß wie die Anzahl der Teilnehmer, die alle Aufgaben richtig lösten, und gleich der Anzahl derjenigen, die genau 3 richtige Lösungen abgaben. Die Anzahl der richtigen (s. Spalte III, Zeile f) ist genau dreimal so groß wie die Anzahl der Teilnehmer mit genau 2 richtigen Lösungen und doppelt so groß wie die Anzahl aller Teilnehmer. Mit diesen Angaben seid ihr in der Lage, die Tabelle zu vervollständigen."

	I Anzahl der richtigen Lösungen pro Schüler	II Anzahl der Schüler	III Anzahl der richtigen Lösungen insgesamt
a)	0	...	...
b)	1	...	...
c)	2	...	...
d)	3	...	...
e)	4	...	...
f)	Gesamtzahlen	36	...

7. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 5
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 070521:

Wenn gilt: 1 kg Altpapier entspricht $0,7$ kg weißes Papier, dann gilt auch: $336 \cdot 1$ kg Altpapier entspricht $336 \cdot 0,7\,\text{kg} = 235,2\,\text{kg}$ weißes Papier

Ferner gilt: $235,2\,\text{kg} = 7840 \cdot 0,03\,\text{kg}$. Da auch $30\,\text{g} = 0,03\,\text{kg}$ gilt, folgt daraus, daß 7840 Schreibhefte aus der gesammelten Menge Altpapier hergestellt werden können.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 070522:

Es bestehe die Zahl z aus den Ziffern a und b. Dann gilt: $z = 10a + b$ und außerdem

$$b = 3a. \tag{1}$$

Ferner gilt nach Vertauschen der Ziffern a und b:

$$10b + a = 36 + (10a + b). \tag{2}$$

Mit (1) in (2) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} 10 \cdot 3a + a &= 36 + (10a + 3a) \\ 31a &= 36 + 13a \\ 18a &= 36 \\ a &= 2 \\ b &= 6 \end{aligned}$$

Damit ist $z = 26$. Die Probe bestätigt die Lösung.

Anmerkung: Da es sich um Ziffern a und b handelt (also um Zahlen kleiner 10), ist die zu betrachtene Zahlenmenge sehr klein - es kommen genaugenommen nur 13, 26, 39 infrage, da $b = 3a$ gilt. Diese 3 Varianten können durchprobiert werden und führen genauso zur Lösung.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 070523:

Das rechtwinklige zu konstruierende Dreieck soll einen rechten Winkel bei A und einen Winkel von 45° bei D_1 haben. Nach Innenwinkelsummensatz bleibt für den Winkel bei D ebenfalls eine Größe von 45°. Damit handelt es sich um ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck. Dieses Dreieck hat 2 gleich lange Schenkel: $\overline{AD} = \overline{AD_1}$.

Der Punkt D_1 kann nun auf der Seite AB konstruiert werden, indem ein Kreisbogen um A mit der Länge AD gezeichnet wird. Der Schnittpunkt mit der Seite AB ist der Punkt D_1.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 070524:

Es seien die Einträge in der Spalte II mit a_2 bis e_2 sowie in der Spalte III mit a_3 bis f_3 bezeichnet. Dann gelten folgende Beziehungen:

(1) $a_2 = e_2$

(2) $b_2 = 2 \cdot e_2$

(3) $b_2 = d_2$

(4) $f_3 = 3 \cdot c_2$

(5) $f_3 = 2 \cdot 36 = 72$

Und hier noch die offensichtlichen Beziehungen der Elemente der 2. zu denen der 3. Spalte:

(6) $a_3 = 0 \cdot a_2 = 0$

(7) $b_3 = 1 \cdot b_2$

(8) $c_3 = 2 \cdot c_2$

(9) $d_3 = 3 \cdot d_2$

(10) $e_3 = 4 \cdot e_2$

Schließlich gilt die Aufsummierung der 2. Spalte:

(11) $a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + e_2 = 36$

Aus (5) folgt $f_3 = 72$ und in (4) ergibt sich damit $c_2 = 24$ (12). Mit (1), (2), (3) und (12) in (11) erhalten wir:

$$\begin{aligned} a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + e_2 &= 36 \\ e_2 + 2 \cdot e_2 + 24 + b_2 + e_2 &= 36 \\ 4 \cdot e_2 + 2 \cdot e_2 &= 12 \\ 6e_2 &= 12 \\ e_2 &= 2 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich nun folgende Tabelle:

	I Anzahl der richtigen Lösungen pro Schüler	II Anzahl der Schüler	III Anzahl der richtigen Lösungen insgesamt
a)	0	2	0
b)	1	4	4
c)	2	24	48
d)	3	4	12
e)	4	2	8
f)	Gesamtzahlen	36	72

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel