6. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1966/1967

Aufgaben und Lösungen

6. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 061221:
Beweisen Sie folgenden Satz:

Sind α, β, γ die Gradmaße der Winkel eines beliebigen ebenen Dreiecks, so gilt stets:

$$\cot\alpha \cdot \cot\beta + \cot\beta \cdot \cot\gamma + \cot\gamma \cdot \cot\alpha = 1.$$

Aufgabe 061222:
In einer Ebene seien die vier Punkte P, Q, R, S ($P \neq Q, R \neq S, PQ$ nicht senkrecht auf RS) gegeben.

Es ist zu zeigen, daß man dann stets vier Geraden p, q, r, s mit P auf p, Q auf q, R auf r und S auf s so konstruieren kann, daß ihre sämtlichen Schnittpunkte die Ecken eines Quadrates bilden.

Aufgabe 061223:
Beweisen Sie folgende Behauptung!

Ist $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ durch 30 teilbar, dann ist auch $p = a_1^5 + a_2^5 + \cdots + a_n^5$ durch 30 teilbar.

($a_1, a_2, \ldots, a_n$ seien n ganze Zahlen.)

Aufgabe 061224:
Es sei M der Mittelpunkt der Kugel K_1, und P sei ein Punkt außerhalb K_1. Ferner sei K_2 die Kugel mit dem Mittelpunkt P und dem Radius von der Länge MP, und I_F sei der Flächeninhalt des innerhalb K_1 liegenden Teiles von K_2.

Beweisen Sie, daß I_F von der Lage des Punktes P unabhängig ist!

Aufgabe 061225:
Es seien n, p, r, s natürliche Zahlen. Ferner sei

$$u = \frac{(r + s \cdot \sqrt{p})^n + (r - s \cdot \sqrt{p})^n}{2}, \quad v = \frac{(r + s \cdot \sqrt{p})^n - (r - s \cdot \sqrt{p})^n}{2 \cdot \sqrt{p}}, \quad t = r^2 - s^2 p, \quad z = u^2 - t^n.$$

Man beweise:

a) u und v sind natürliche Zahlen.

b) Die (somit ganze) Zahl z ist durch v^2 ohne Rest teilbar.

Aufgabe 061226:

a) Geben Sie alle Tripel reeller Zahlen (x, y, z) an, die das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ 4x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 8x & + & 5y & + & 3z & = & 4 \end{array} \qquad (1)$$

erfüllen!

b) Bilden Sie alle Gleichungssysteme, die sich von dem Gleichungssystem (**??**) in genau einem Koeffizienten unterscheiden und unendlich viele Lösungen besitzen!

(Als ”Koeffizienten” seien hier sowohl die auf der ”linken Seiten” stehenden ”Vorzahlen” der Variablen als auch die ”absoluten Glieder” auf den ”rechten Seiten” bezeichnet.)

Geben Sie auch in diesen Fällen alle Tripel reeller Zahlen an, die die jeweiligen Gleichungssysteme erfüllen!

c) Bilden Sie ein Gleichungssystem, das sich von (**??**) in genau zwei Koeffizienten unterscheidet, das aber von keinem Tripel reeller Zahlen erfüllt wird!

6. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 061321:
Es gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:

1. $\gamma = 180^o - \alpha - \beta$ (Innenwinkelsumme im Dreieck)
2. $\sin(180^o - x) = \sin x$
3. $\cos(180^o - x) = -\cos x$
4. $\cot\gamma = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\cos(180^o-\alpha-\beta)}{\sin(180^o-\alpha-\beta)} = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ (mit (1), (2) und (3))
5. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$ (Additionstheorem)
6. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$ (Additionstheorem)

Damit ergibt sich für die Ausgangsgleichung mit (4), (5) und (6):
$\cot\alpha\cdot\cot\beta + \cot\beta\cdot\cot\gamma + \cot\gamma\cdot\cot\alpha$
$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\cdot\left(-\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}\right) + \left(-\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}\right)\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$
$= \frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} - \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\cdot\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$
$= \frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)-(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)}$
$= \frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta-\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta-\cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta+\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)}$
$= \frac{\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta+\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)}$
$= \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$
$= 1.$
Das Kürzen ist problemlos möglich, da $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ Winkel in einem nicht-entarteten Dreieck sind.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 061322:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Lösung 061323:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Lösung 061324:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Lösung 061325:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Lösung 061326:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Quellenverzeichnis

(0) Unbekannt