



**6. Mathematik Olympiade**  
**2. Stufe (Kreisolympiade)**  
**Klasse 9**  
**Saison 1966/1967**

Aufgaben und Lösungen





6. Mathematik-Olympiade  
2. Stufe (Kreisolympiade)  
Klasse 9  
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 060921:

Geben Sie vier verschiedene Paare  $(a, b)$  positiver, ganzer Zahlen an, so daß die Differenz der Quadrate der beiden Zahlen jedes Paares 105 beträgt!

(Je zwei Paare  $(a, b)$  und  $(b, a)$  gelten dabei als nicht verschieden voneinander.)

Aufgabe 060922:

Innerhalb eines Kreises  $k$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius von der Länge  $r$  liege der von  $M$  verschiedene Punkt  $P$ .

Konstruieren Sie unter allen Sehnen durch  $P$  die kürzeste!

Aufgabe 060923:

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Die Diagonalen des ebenen konvexen Vierecks  $ABCD$  schneiden einander genau dann rechtwinklig, wenn  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$  gilt, wobei  $a, b, c$  und  $d$  die Seitenlängen des Vierecks sind.

Aufgabe 060924:

Die Schülerinnen Brigitte, Christina, Dorothea, Eva, Inge und Monika und die Schüler Anton, Fred, Günter, Helmut, Jürgen und Kurt einer Laienspielgruppe wollen einen Tanz aufführen. Dabei wird zu Paaren getanzt.

- (1) In keinem Paar soll der männliche Partner kleiner als der weibliche sein.

Außerdem haben einige Teilnehmer noch verschiedene Wünsche:

- (2) Christina möchte nicht mit Anton tanzen, der kleiner als Brigitte ist.
- (3) Jürgen möchte nur mit Dorothea oder Monika tanzen.
- (4) Fred, der größer als Helmut, aber kleiner als Anton ist, möchte nur mit Eva oder Monika tanzen.
- (5) Kurt, der weiß, daß Eva größer als Anton ist, versucht, eine Einteilung zu finden, die allen Wünschen gerecht wird.

Geben Sie alle Möglichkeiten der Zusammenstellung dieser Schüler zu Tanzpaaren an, die die genannten Wünsche und Bedingung (1) erfüllen!

Die Aufgabe ist dahingehend zu verstehen, daß sämtliche Zusammenstellungen zu Tanzpaaren angegeben werden sollen, die auf Grund der Angaben nicht als unverträglich mit einer oder mehreren der gestellten Bedingungen (1) bis (5) ausgeschlossen werden müssen.



6. Mathematik-Olympiade  
2. Stufe (Kreisolympiade)  
Klasse 9  
Lösungen

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Lösung 060921:

Durch die Aufgabenstellung ergibt sich folgende Gleichung:

$105 = a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$  (3. Binomische Formel). Nun wird substituiert:  $x := a + b$  und  $y := a - b$ .

Damit gilt:  $a = x - b = y + b$ . Also ergibt sich:  $b = (x - y)/2$  (1) sowie  $a = (x + y)/2$  (2)

105 hat die Teiler: 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105. Damit gibt es die folgenden möglichen Paare  $(x, y)$  mit  $x \geq y$ , da  $a + b \geq a - b$ , wenn  $a, b \in \mathbf{N}$ : (105, 1), (35, 3), (21, 5), (15, 7).

Nun wird wieder rücksubstituiert unter Verwendung der Gleichungen (1) und (2):

Fall 1:  $x = 105, y = 1 \Rightarrow a = 53, b = 52$

Fall 2:  $x = 35, y = 3 \Rightarrow a = 19, b = 16$

Fall 3:  $x = 21, y = 5 \Rightarrow a = 13, b = 8$

Fall 4:  $x = 15, y = 7 \Rightarrow a = 11, b = 4$

(von Felix Kaschura)

Variante:

VP  $a^2 - b^2 = 105$  oder  $a^2 = 105 + b^2$  bzw.  $a = \sqrt{b^2 + 105}$

Wenn man diese Funktion darstellt, kann man schnell die ersten Lösungen ablesen: (11, 4) und (13, 9).

Weitere Paare sind (19, 16) und (53, 52). Wegen  $11 - 4 = 7; 13 - 8 = 5; 19 - 16 = 3; 53 - 52 = 1$  steht zu vermuten, daß die Reihe nicht fortgesetzt werden kann. Ein Beweis ist nicht nötig - ich habe 4 Paare!

(von Volker Pöschel)

Variante:

TK Und die rechentechnische Lösung mit php-Script:

```
<?php
$i = 1;
while ((( $i * $i ) + 105 ) > (( $i + 1 ) * ( $i + 1 )))
{ $i++; }
for ( $j = 1; $j <= $i; $j++ )
for( $k = $j + 1; $k <= ( $i + 1 ); $k++ )
{
if ( abs( ( $j * $j ) - ( $k * $k ) ) == 105 )
echo "a=$j b=$k<br>";
}
?>
```



---

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Felix Kaschura*

Lösung 060922:

*Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)*

Lösung 060923:

*Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)*

Lösung 060924:

*Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)*



---

## Quellenverzeichnis

(0) Unbekannt