6. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Saison 1966/1967

Aufgaben und Lösungen

6. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060831:

Die Kante eines Würfels habe die Länge $a_1 = 2$ cm, die eines anderen Würfels die Länge $a_2 = 6$ cm.

Berechne das Verhältnis der Kantenlängen dieser zwei Würfel, das Verhältnis ihrer Oberflächeninhalte und das Verhältnis ihrer Rauminhalte!

Aufgabe 060832:

Auf der Grundlinie BC eines gleichschenkligen Dreiecks ΔABC seien von zwei Punkte M_1 und M_2 gegeben. Durch M_1 und M_2 werden jeweils die Parallelen zu den Dreiecksseiten AB und AC gezogen. Die Parallelen durch M_1 schneiden AB in D und AC in E, die Parallelen durch M_2 die Seite AB in F und AC in G.

Beweise, daß der Umfang des Parallelogramms M_1EAD gleich dem Umfang des Parallelogramms M_2GAF ist!

Aufgabe 060833:

Gegeben seien 3 000 g einer 7,2-prozentigen Lösung von Kochsalz in Wasser (d.h. in je 100 g der Lösung sind genau $7,2$ g Kochsalz enthalten). Durch Sieden dieser Lösung verdampft soviel Wasser, daß genau 2 400 g der eingedampften Lösung verbleibt.

Wieviel prozentig ist die so erhaltene Lösung?

Aufgabe 060834:

Von 10 Koffern und 10 Schlüsseln sei bekannt, daß jeder Schlüssel zu genau einem Koffer paßt und zu jedem Koffer genau ein Schlüssel. Man weiß aber nicht, welcher Schlüssel zu welchem Koffer gehört.

Jemand ermittelt dies durch probieren, wobei jede Probe darin besteht, daß er für genau einen Koffer und genau einen Schlüssel feststellt, ob sie zusammenpassen oder nicht. Die Reihenfolge der Proben wird so gewählt, daß für jeden Koffer, sobald einmal an ihm eine Probe durchgeführt wurde, dann genau so viele Proben vorgenommen werden, bis der passende Schlüssel ermittelt ist.

Welches ist

a) die kleinste

b) die größte

Zahl von Proben, bei der es vorkommen kann, daß genau nach dieser Probenzahl zu jedem Koffer der richtige Schlüssel feststellbar ist?

Aufgabe 060835:

In der Ebene seien drei Geraden g_1, g_2, g_3 gegeben, von denen keine zwei einander parallel sind. Außerdem ist eine Länge s gegeben.

Konstruiere einen Kreis, der von jeder der Geraden g_1, g_2, g_3 eine Strecke der Länge s abschneidet!

Aufgabe 060836:

Man denke sich das Produkt aller derjenigen ungeraden Zahlen gebildet, die größer als 30 und kleiner als 50 sind. Beantworte, ohne es vollständig zu berechnen, folgende Fragen:

a) Welche Ziffer steht an der Einerstelle des Produkts?

b) Ist das Produkt eine 18stellige Zahl?

6. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 060831:

Die Oberflächeninhalte der beiden Würfel seien O_1 bzw. O_2, die Rauminhalte V_1 bzw. V_2. Dann gilt:

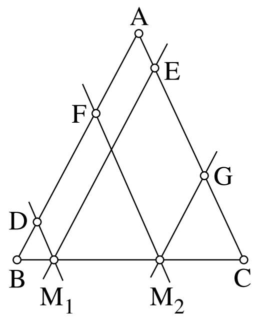
$$a_1 : a_2 = 2 : 6 = 1 : 3$$
$$O_1 : O_2 = 6a_1^2 : 6a_2^2 = 24 : 216 = 1 : 9$$
$$V_1 : V_2 = a_1^3 : a_2^3 = 8 : 216 = 1 : 27$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 060832:

Es gilt $\Delta DBM_1 \sim \Delta ABC$ (das folgt aus der Gleichheit von Stufenwinkeln an geschnittenen Parallelen). Also ist das Dreieck ΔM_1DB gleichschenklig, und es gilt:

$$\overline{BD} = \overline{M_1D}. \qquad (1)$$



Weiterhin gilt:

$$\overline{M_1E} = \overline{AD}, \qquad (2)$$

da M_1EAD laut Konstruktion ein Parallelogramm ist.

Aus (1) und (2) folgt, daß der halbe Umfang des Parallelogramms M_1EAD gleich der Länge des Schenkels AB ist.

Entsprechend zeigt man, daß der halbe Umfang des Parallelogramms M_2GAF gleich der Länge des Schenkels AC ist. Da $\overline{AC} = \overline{AB}$ gilt, folgt, daß die Umfänge der betrachteten Parallelogramme gleich sind.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 060833:

In je 100 g der Lösung sind genau 7,2 g Kochsalz enthalten. Folglich beträgt die Kochsalzmenge in 3 000 g Lösung

$$30 \cdot 7,2\,g = 216\,g.$$

Da beim Verdampfen die Kochsalzmenge konstant bleibt, sind also auch in der neuen Lösung von 2 400 g genau 216 g Kochsalz entnalten. Mithin enthält die neue Lösung in je 100 g eine Kochsalzmenge von genau 216 g : 24 = 9 g, d.h., die Lösung ist 9prozentig.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 060834:

Nach Aufgabenstellung müssen an dem Koffer, an dem die erste Probe durchgeführt wurde, genau so viel Proben vorgenommen werden, bis zu ihm der passende Schlüssel ermittelt ist. Das ist frühestens nach einer Probe, spätestens nach 9 Proben der Fall.

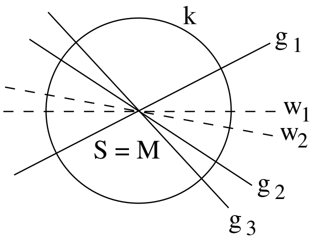
Sodann ist eine entsprechende Überlegung für die restlichen 9 Koffer und Schlüssel durchzuführen u.s.w. bis zu 2 Koffern und Schlüsseln. Für diese sind mit genau einer Probe alle Zusammengehörigkeiten ermittelt. Also ist die kleinste Probenzahl der gesuchten Art $1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 9$, die größte Probenzahl der gesuchten Art $9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 45$.

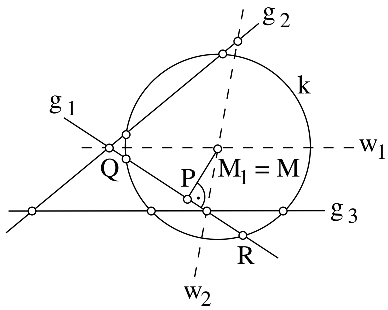
Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 060835:

I. Angenommen, M sei der Mittelpunkt eines der gesuchten Kreise k. Die Sehnen, die k von g_1, g_2, g_3 abschneidet, sind dann gleich lang, also sind sie gleichweit von M entfernt. Daher liegt M auf einer Winkelhalbierenden w_1 von g_1, g_2 und auf einer Winkelhalbierenden w_2 von g_1, g_3.

   a) Haben g_1, g_2, g_3 einen (und wegen ihrer Verschiedenheit dann auch nur einen) Punkt S gemeinsam, so gehen w_1 und w_2 durch S; außerdem ist $w_1 \neq w_2$; denn wäre $w_1 = w_2 = w$, so folgte $\sphericalangle(w, g_3) \cong \sphericalangle(g_1, w) \cong \sphericalangle(w, g_2)$, also $g_3 = g_2$, also $g_3 \parallel g_2$. Somit ergibt sich $M = S$. (erste Abbildung)





   b) Haben g_1, g_2, g_3 keinen Punkt gemeinsam, so bilden sie nach Voraussetzung ein Dreieck D, und es folgt: M ist einer der 4 Schnittpunkte M_0, M_1, M_2, M_3 der Innen- und Außenwinkelhalbierenden von D.

   Daher kann ein Kreis k höchstens dann die verlangte Eigenschaft haben, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten wird:

II. a) Man schlage den Kreis k um S mit dem Radius von der Länge $\frac{s}{2}$.

   b) Man wähle als M einen der 4 Punkte M_0, M_1, M_2, M_3. Von M fälle man das Lot MP auf g_1. Um P schlage man den Kreis mit dem Radius von der Länge $\frac{s}{2}$; er schneidet g_1 in zwei Punkten Q, R. Dann schlage man den Kreis k um M durch Q.

III. Ist ein Kreis k wie in II konstruiert, so hat er die verlangte Eigenschaft.

   Beweis: Er schneidet von g_1 nach Konstruktion eine Strecke der Länge s ab und von g_2, g_3 je eine ebenso lange Strecke, da sein Mittelpunkt von g_1, g_2, g_3 gleichweit entfernt ist.

IV. Die Konstruktion II ergibt a) genau einen Kreis, b) genau 4 verschiedene Kreise. Nach III sind dies und nach I auch nur dies alle gesuchten.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 060836:

a) Multipliziert man eine Zahl, die auf 5 endet, mit einer beliebigen ungeraden Zahl, so erhält man wieder eine Zahl mit der Einerziffer 5. Das zu untersuchende Produkt enthält den Faktor 45, der auf 5 endet, und sonst nur ungerade Faktoren. Seine Einerziffer ist daher eine 5.

b) Man kann das Produkt in die Teilprodukte $31 \cdot 49$, $33 \cdot 47$, $35 \cdot 45$, $37 \cdot 43$ und $39 \cdot 41$ zerlegt denken. Jedes dieser Teilprodukte ist von der Form $(a - b)(a + b)$ mit $a = 40$ und $1 \leq b \leq 9$ und daher eine positive Zahl, die sicher kleiner als $2\,000$ ist. Das gesamte Produkt ist also kleiner als $2\,000^5$.

Nun ist aber

$$\begin{aligned} 2\,000^5 &= 2\,000 \cdot 2\,000 \cdot 2\,000 \cdot 2\,000 \cdot 2\,000 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1\,000 \cdot 1\,000 \cdot 1\,000 \cdot 1\,000 \cdot 1\,000 \\ &= 32 \cdot 1\,000\,000\,000\,000\,000 \end{aligned}$$

eine 17stellige Zahl. Daher kann das zu untersuchende Produkt keine 18stellige Zahl sein.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Quellenverzeichnis

(15) "a+b = b+a" - Heft 66, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 8 - Dokumentation I.-XVIII. Olympiade (1961-1979), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1979.