6. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1966/1967

Aufgaben und Lösungen

6. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060721:

Gegeben sind eine Gerade g und ein nicht auf g liegender Punkt P.

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal alle Geraden durch P, die mit g einen Winkel vom Gradmaß 60° bilden!

Aufgabe 060722:

In den Kreis k mit dem Mittelpunkt M sei das nicht überschlagene Viereck $ABCD$ so eingezeichnet, daß alle seine Seiten Sehnen des Kreises sind (Sehnenviereck).

Beweise, daß in jedem Sehnenviereck die Summe der Gradmaße je zweier gegenüberliegender Winkel 180° beträgt!

Aufgabe 060723:

Jemand schreibt alle natürlichen Zahlen von 1 bis 5 555 auf, jede genau einmal.

Berechne die Anzahl aller dabei geschriebenen Ziffern 9!

Aufgabe 060724:

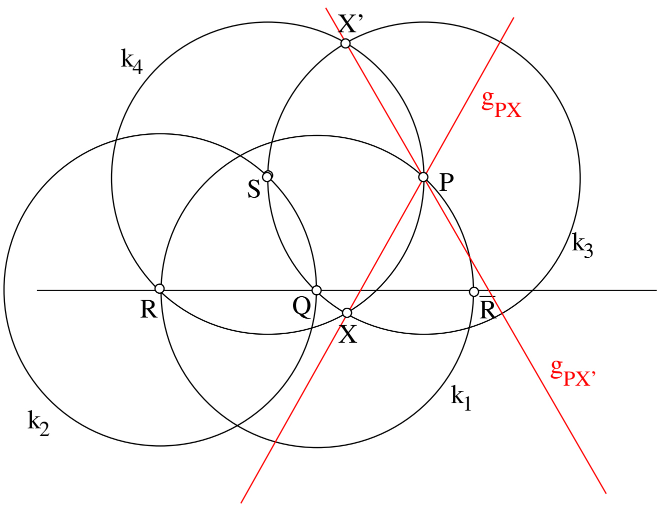
In einem zylindrischen Gefäß (gerader Kreiszylinder mit waagerechter Bodenfläche) befindet sich Wasser. Der Wasserspiegel steht bei $\frac{3}{4}$ der Höhe des Gefäßes. Nachdem genau $2\frac{1}{2}$ Liter Wasser aus diesem Gefäß ausgegossen wurden, steht der Wasserspiegel bei $\frac{2}{5}$ der Gefäßhöhe.

Welches Fassungsvermögen hat das Gefäß?

6. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 060721:



Man wählt auf g einen beliebigen Punkt Q und schlägt um ihn mit $\overline{PQ}$ den Kreis k_1. Dieser schneidet g in zwei Punkten: R und $\overline{R}$.

Nun schlägt man um R und um P mit $\overline{PQ}$ die Kreise k_2 und k_3. Diese schneiden einander in Q und in einem Punkt $S \neq Q$ (andernfalls würden sie sich in Q berühren, also lägen R, P und Q auf derselben Geraden, d.h., P läge auf g, im Widerspruch zur Voraussetzung).

Schlägt man nun mit $\overline{PQ}$ um S den Kreis k_4, so schneidet dieser k_3 in zwei Punkten: X und X', $X \neq X'$. Die Geraden g_{PX} und $g_{PX'}$ und nur diese genügen der Aufgabenstellung. (Der zweite Schnittpunkt R' von k_1 und g führt zwar zu anderen Punkten $\overline{X}$ und $\overline{X'}$, aber zu denselben Geraden).

Beweis: Laut Konstruktion ist das Dreieck ΔSXP gleichseitig. Außerdem ist $SP \parallel RQ$ (als Seiten in dem Rhombus $RQPS$). Die Gerade g_{XP} schneide g im Punkte P_1.

Dann gilt (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen)

$$\sphericalangle SPP_1 \simeq \sphericalangle PP_1\overline{R}$$

d.h. $\sphericalangle PP_1\overline{R}$ hat ein Gradmaß von 60°. Ebenso ist laut Konstruktion $X'P \parallel SX$. Die Gerade $g_{PX'}$ schneidet mithin g ebenfalls unter einem Winkel von 60°. Da es nur zwei Geraden durch P gibt, die mit g einen Winkel vom Gradmaß 60° bilden, sind damit alle derartigen Geraden gefunden.□

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 060722:

Wir betrachten irgend zwei gegenüberliegende Winkel und bezeichnen ihre Gradmaße mit α und γ und ihre Scheitelpunkte mit A und C, so daß also α und γ die Gradmaße der Winkel $\sphericalangle DAB$ und $\sphericalangle BCD$ sind. Ferner seien β_1, β_2, δ_1, bzw. δ_2 die Gradmaße der Winkel $\sphericalangle ABM$, $\sphericalangle MBC$, $\sphericalangle CDM$ und $\sphericalangle MDA$.

Behauptung: $\alpha + \gamma = 180°$

Beweis: Wir unterscheiden 3 Fälle.

Fall 1: Punkt M liegt im Innern des Sehnenvierecks:

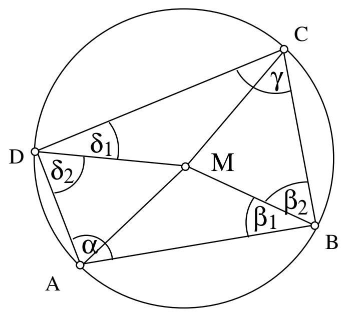
In den Dreiecken ΔABM, ΔBCM, ΔCDM und ΔDAM sind die von M ausgehenden Seiten Radien des Kreises k. Diese Dreiecke sind daher gleichschenklig mit der Spitze M. Daraus folgt:

(1) $\beta_1 + \delta_2 = \alpha$ und

(2) $\beta_2 + \delta_1 = \gamma$.

Weiterhin gilt: (3) $\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta_1 + \delta_2 = 360°$, als Winkelsumme im Viereck $ABCD$.

Aus (1), (2) und (3) folgt $\alpha + \gamma + \alpha + \gamma = 360°$ und damit $\alpha + \gamma = 180°$. □



Fall 2: Punkt M liegt auf dem Rande des Sehnenvierecks:

In diesem Fall ist entweder

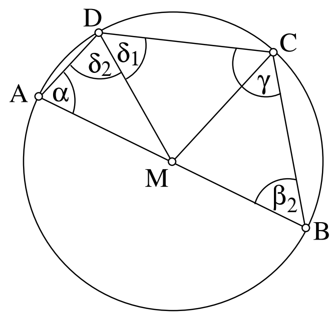
$\beta_1 = 0$ oder

$\beta_2 = 0$ oder

$\delta_1 = 0$ oder

$\delta_2 = 0$.

Beweis verläuft analog. □



Fall 3: Punkt M liegt außerhalb des Sehnenvierecks:

In diese Falle ist entweder β_1 durch $-\beta_1$ oder

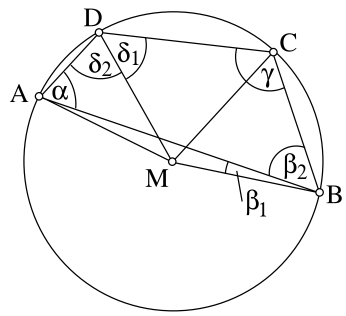
β_2 durch $-\beta_2$ oder

δ_1 durch $-\delta_1$ oder

δ_2 durch $-\delta_2$ oder

zu ersetzen.

Der Beweis verläuft analog Fall 1. □



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

<u>Lösung 060723:</u>

Die Anzahl der Ziffern 9 beträgt an der Tausenderstelle 0, an der Hunderterstelle (von 1 bis 999, von 1 000 bis 1 999, von 2 000 bis 2 999, von 3 000 bis 3 999, von 4 000 bis 4 999 je 100mal die Ziffer 9)

$$5 \cdot 100 = 500,$$

an der Zehnerstelle (in jedem Hunderterbereich 10mal, in 55 Hunderterbereichen also)

$$10 \cdot 55 = 550,$$

an der Einerstelle (in jedem Zehnerbereich eine Ziffer 9, in 555 Zehnerbereichen also)

$$1 \cdot 555 = 555.$$

Insgesamt wird die Ziffer 9 dabei 1 650mal aufgeschrieben.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 060724:

Das Volumen (in Litern gemessen) ist der Höhe des Gefäßes direkt proportional. $\frac{3}{4}$ des Volumens verringern sich auf $\frac{2}{5}$ des Volumens dadurch, daß $2\frac{1}{2}$ Liter ausgegossen werden.

Wegen $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{7}{20}$ folgt daraus: $\frac{7}{20}$ des Volumens sind gleich $2\frac{1}{2}$ Liter. Das Gefäß hat demnach ein Fassungsvermögen von $\frac{20}{7} \cdot 2\frac{1}{2}$ Liter $= \frac{50}{7}$ Liter.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.