6. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1966/1967

Aufgaben und Lösungen

6. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060711:

Ein Vater geht mit seinem Sohn spazieren. Dabei stellen sie fest: Jede Strecke, die der Sohn mit drei Schritten zurücklegt, schafft der Vater mit zwei Schritten.

Nach wieviel Schritten des Vaters setzen beide gleichzeitig den rechten Fuß auf, wenn beide den ersten Schritt gleichzeitig beginnen und mit dem rechten Bein ausführen?

Aufgabe 060712:

In dem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit dem rechten Winkel bei C sei S der Schnittpunkt der beiden Halbierenden der spitzen Winkel.

Ermittle das Gradmaß δ des Winkels $\sphericalangle ASB$, den diese Winkelhalbierenden miteinander bilden!

Aufgabe 060713:

In Rumänien gibt es Geldscheine zu 3 und 5 Lei.

Beweise: Jeder beliebige Geldbetrag in Lei, der größer als 7 Lei ist, kann unter alleiniger Verwendung von 3- und 5-Lei- Scheinen zusammengestellt werden, falls genügend viele dieser Geldscheine vorhanden sind!

Aufgabe 060714:

Zwischen den Schenkeln s_1 und s_2 eines spitzen Winkels liegt der Punkt P. Der Scheitelpunkt des Winkels sei S.

Man konstruiere auf s_1 und s_2 die Punkte X, für die die Länge der Strecke XS gleich der Länge der Strecke XP ist, für die also $\overline{XS} = \overline{XP}$ gilt.

6. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

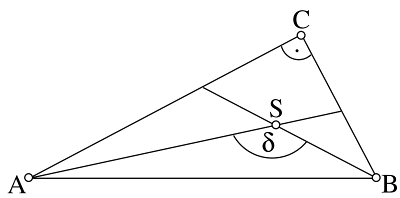
Lösung 060711:

Nur nach jedem zweiten Schritt des Vaters setzen Vater und Sohn gleichzeitig einen Fuß auf. Das ist beim Vater stets der linke Fuß, da er laut Aufgabe den ersten Schritt mit den rechten Bein ausgeführt hat. Also können beide niemals unter den Bedingungen der Aufgabe gleichzeitig den rechten Fuß aufsetzen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 060712:

Das Gradmaß des Schnittwinkels $\sphericalangle ASB$ sei δ. Die Gradmaße der spitzen Winkel $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle ABC$ seien α bzw. β.



Nach dem Winkelsummensatz gilt im Dreieck ΔABS: $\delta = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$. Da im rechtwinkligen Dreieck ΔABC $\alpha + \beta = 90°$ ist, folgt $\delta = 135°$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 060713:

Wegen $3 + 5 = 8$, $3 + 3 + 3 = 9$ und $5 + 5 = 10$ lassen sich die Geldbeträge 8 Lei, 9 Lei und 10 Lei in der geforderten Weise zusammenstellen.

Die Zahlen 8, 9 und 10 sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, die bei der Division durch 3 der Reihe nach den Rest 2 bzw. 0 bzw. 1 lassen. Jede natürliche Zahl, die bei der Division durch 3 den Rest 2 läßt, kann als Summe aus 2 und einem Vielfachen von 3 dargestellt werden (z.B. $17 = 2 + 5 \cdot 3$). Entsprechendes gilt für diejenigen natürlichen Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 0 bzw. 1 lassen.

Da bei der Division einer beliebigen natürlichen Zahl durch 3 nur diese drei Reste auftreten können, lassen sich die übrigen in der Aufgabe geforderten Geldbeträge, da sie größer sind als 8 Lei bzw. 9 Lei bzw. 10 Lei, durch Addition einer entsprechenden Anzahl von 3-Lei-Scheinen zu den "Grundbeträgen" 8 Lei, 9 Lei bzw. 10 Lei zusammenstellen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 060714:

Man verbindet den Scheitelpunkt S des gegebenen Winkels mit dem Punkt P und konstruiert zur Strecke PS die Symmetrieachse s. Die Schnittpunkte X_1 und X_2 von s mit s_1 und s_2 sind die gesuchten Punkte; denn weil sie Punkte von s sind, gilt für sie $\overline{X_1S} = \overline{X_1P}$ bzw. $\overline{X_2S} = \overline{X_2P}$.

Da alle übrigen Punkte von s_1 und s_2 nicht auf s liegen, kann für sie die oben genannte Beziehung nicht gelten. Die Punkte X_1 uund X_2 sind also die einzigen, die den Bedingungen der Aufgabe genügen. Sie existieren für jeden spitzen Winkel und sind stets eindeutig bestimmt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.