5. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1965/1966

Aufgaben und Lösungen

5. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 051221:

Aus einer Kugel vom Radius r wird ein Kugelsektor herausgeschnitten, der sich aus einem Kegel der Höhe h und dem zugehörigen Kugelsegment zusammensetzt.

a) Welche Länge h hat die Höhe des Kegels, wenn der Flächeninhalt der herausgeschnittenen Kugelkappe gleich einem Drittel des Oberflächeninhaltes der Kugel ist?

b) Welche Länge h hat die Höhe des Kegels, wenn das Volumen des Kugelsektors gleich einem Drittel des Volumens der Kugel ist?

Aufgabe 051222:

Man ermittle sämtliche nicht negativen ganzen Zahlen n, für die die Zahl $z = 5^n - 4^n$ durch 61 teilbar ist.

Aufgabe 051223:

Es seien a eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine reelle Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Ist die Funktion f an der Stelle x definiert, so ist sie auch an den Stellen $x + a$ und $x - a$ definiert.

(2) Für alle x, für die die Funktion f definiert ist, gilt

$$f(x + a) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}.$$

a) Es ist zu beweisen, daß die Funktion f periodisch ist, d. h., daß es eine von Null verschiedene reelle Zahl b gibt, so daß $f(x) = f(x + kb)$ für alle x, für die die Funktion f definiert ist, und für alle ganzen Zahlen k gilt.

b) Geben Sie eine Funktion an, die die obigen Eigenschaften hat!

Aufgabe 051224:

Man ermittle alle reellen Zahlen x, y, für die die Gleichung

$$\sin(x + y) = \sin x + \sin y \text{ erfüllt ist.}$$

Aufgabe 051225:

Man ermittle sämtliche reellen Zahlen x, für die das Polynom

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

a) seinen kleinsten Wert annimmt (Wie groß ist dieser?) und

b) seinen größten Wert annimmt, wenn x auf das Intervall $1 \leq x \leq 4$ beschränkt wird (Wie groß ist dieser?).

Aufgabe 051226:

Kann ein von einem regelmäßigen Tetraeder begrenzter Körper bei parallelem und senkrecht auf die Bildebene auftreffendem Licht auf dieser einen quadratförmigen Schatten werfen?

5. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 051221:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Lösung 05122:

1. Fall: $n = 3k, k \geq 0$
mod 61: $5^n - 4^n \equiv 125^k - 64^k \equiv 3^k - 3^k \equiv 0 \pmod{61}$, also durch 61 teilbar.

2. Fall: $n = 3k+1, k \geq 0$
mod 61: $5^n - 4^n \equiv 5 \cdot 125^k - 4 \cdot 64^k \equiv 5 \cdot 3^k - 4 \cdot 3^k \equiv 3^k \not\equiv 0 \pmod{61}$, da ggT(3,61) = 1

3. Fall: $n = 3k+2, k \geq 0$
mod 61: $5^n - 4^n \equiv 25 \cdot 125^k - 16 \cdot 64^k \equiv 25 \cdot 3^k - 16 \cdot 3^k \equiv 9 \cdot 3^k \equiv 3^{k+2} \not\equiv 0 \pmod{61}$, da ggT(3,61) = 1

$5^n - 4^n$ ist genau dann durch 61 teilbar, wenn $n \geq 0$ durch 3 teilbar ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Matthias Lösche

Lösung 051223:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Lösung 051224:
Es gelten folgende trigonometrische Beziehungen:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha \tag{1}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{3}$$

Damit gilt für die gegebene Gleichung mit (1) und (2):

$$\sin(x+y) = \sin x + \sin y$$

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2} = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} \tag{4}$$

Fall 1: $\sin\frac{x+y}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x+y}{2} = k\pi \Rightarrow \underline{\underline{x + y = 2k\pi, k \in Z}}$
Fall 2: $\sin\frac{x+y}{2} \neq 0$ in (4) und mit (3):

$$\begin{aligned}\cos\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2} &= 0\\ -2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{y}{2} &= 0 \qquad (5)\end{aligned}$$

Dieses Produkt ist dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist:
Fall 2a: $\sin\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 2k\pi, k \in Z}}$
Fall 2b: $\sin\frac{y}{2} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = 2k\pi, k \in Z}}$

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 051225:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Lösung 051226:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Quellenverzeichnis

(0) Unbekannt