5. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Saison 1965/1966

Aufgaben und Lösungen

5. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 050831:
Ermittle die Anzahl aller Zahlen zwischen 10 000 und 99 999, die wie z.B. 35 453 vorwärts gelesen die gleiche Ziffernfolge wie rückwärts gelesen ergeben.

Aufgabe 050832:
Ermittle alle in der Ebene des Dreiecks ABC gelegenen Punkte D, die mit den Eckpunkten A und B des Dreiecks ABC ein Dreieck bilden, dessen Flächeninhalt halb so groß ist wie der des Dreiecks ABC.

Aufgabe 050833:
Gib alle Quadrupel (z_1, z_2, z_3, z_4) zweistelliger Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4 an, die folgende Eigenschaften haben. Für jedes Quadrupel gilt:

(1) $z_1 \cdot z_2 = z_3 \cdot z_4$,

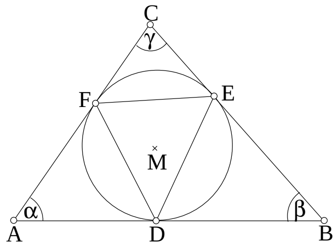
(2) z_3 erhält man, wenn man z_1 rückwärts liest,

(3) z_4 erhält man, wenn man z_2 rückwärts liest, (Beispiel $24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$)

(4) Unter den vier Ziffern von z_1 und z_2 gibt es keine zwei, die gleich sind,

(5) z_1 ist die kleinste der vier Zahlen.

Aufgabe 050834:



Der Inkreis k des Dreiecks ABC habe mit den Dreiecksseiten AB, BC und CA die Berührungspunkte D, E und F (siehe Abb.). Die Winkel des Dreiecks ABC haben die Maße α, β, und γ.

Ermittle die Maße der Winkel $\sphericalangle DEF$, $\sphericalangle EFD$ und $\sphericalangle FDE$ des Dreiecks DEF!

Aufgabe 050835:
Jemand gießt 9 kg Wasser mit einer Temperatur von 30°C und 6 kg Wasser mit einer Temperatur von 85°C zusammen und rührt das Gemisch gut um.

Welche Temperatur würde das Gemisch annehmen, wenn man den Wärmeaustausch mit der Umgebung unberücksichtigt läßt?

Aufgabe 050836:

a) Konstruiere das Dreieck ABC, wenn $a+b$, r und α gegeben sind!

   Dabei ist a die Länge der Seite BC, b die Länge der Seite AC, r die Länge des Umkreisradius und α das Maß des Winkels $\sphericalangle CAB$.

b) Beschreibe und diskutiere die Konstruktion!

Anmerkung: Die Konstruktionsbeschreibung soll kurz gehalten sein. Bei der Konstuktion von Dreiecken genügt die Angabe von Seiten und Winkeln, aus denen sich das Dreieck konstruieren läßt.

5. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 050831:

Die gesuchte Anzahl ist gleich der Anzahl aller dreistelligen Zahlen, da sich aus jeder dreistelligen Zahl genau eine derartige Zahl ergibt, wenn man die ersten beiden Ziffern der Zahl in umgekehrter Reihenfolge hinter die Zahl schreibt und man umgekehrt jede derartige fünfstellige Zahl aus einer dreistelligen erhält.

Da es 900 dreistellige Zahlen gibt, beträgt die gesuchte Anzahl 900.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 050832:

Die zur Seite AB gehörige Höhe CE des Dreiecks ΔABC habe die Länge h_c, die Seite AB habe die Länge c. Dann beträgt der Flächeninhalt F des Dreiecks ΔABC: $F = \frac{1}{2}c \cdot h_c$.

Da die geforderten Dreiecke in der Seite AB mit dem Dreieck ΔABC übereinstimmen, haben sie genau dann einen halb so großen Flächeninhalt, wenn die Länge der zu AB gehörigen Höhe bei diesen Dreiecken $\frac{h_c}{2}$ beträgt. Das ist offensichtlich für alle Dreiecke ΔABD der Fall, bei denen der Punkt D auf einer der beiden zu AB im Abstand $\frac{h_c}{2}$ gezogenen Parallelen liegt, und nur für diese. In jedem anderen Falle ist nämlich der Abstand des Punktes D von der Geraden durch A und B größer oder kleiner als $\frac{h_c}{2}$.

Die gesuchte Menge ist also die Menge aller Punkte der beiden im Abstand $\frac{h_c}{2}$ zu AB gezogenen Parallelen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 050833:

Bezeichnet man die Ziffern von z_1 mit a und b, die von z_2 mit c und d (in dieser Reihenfolge), dann gilt laut Aufgabe $(10a + b)(10c + d) = (a + 10b)(c + 10d)$, also $99ac = 99bd$, woraus sich $ac = bd$ ergibt.

Wegen $1 \leq a, b, e, d \leq 9$ (ganz) und wegen (4) sowie wegen (5) erhält man die folgenden 10 Zahlenquadrupel, für die (1) gilt:

$$\begin{array}{cc}
(12,\ 63,\ 21,\ 36) & (14,\ 82,\ 41,\ 28) \\
(12,\ 84,\ 21,\ 48) & (23,\ 64,\ 32,\ 46) \\
(24,\ 63,\ 42,\ 36) & (23,\ 96,\ 32,\ 69) \\
(13,\ 62,\ 31,\ 26) & (34,\ 86,\ 43,\ 68) \\
(26,\ 93,\ 62,\ 39) & (36,\ 84,\ 63,\ 48).
\end{array}$$

Umgekehrt erkennt man, daß jedes dieser Quadrupel den gestellten Bedingungen genügt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 050834:

Bezeichnet man den Mittelpunkt des Inkreises mit M, dann gilt: $\Delta CFM \cong \Delta CME$, da sie in 2 Seiten und dem rechten Winkel übereinstimmen.

Folglich gilt: $\overline{CF} = \overline{CE}$ und damit $CM \perp EF$, (1)

und wegen (1) und $ME \perp EG$ auch $\sphericalangle MEF \cong \sphericalangle MFE \cong \sphericalangle MCE$. (2)

Entsprechend erhält man $\sphericalangle MED \cong \sphericalangle MDE \cong \sphericalangle MBE$ (3)

und $\sphericalangle MDF \cong \sphericalangle MFD \cong \sphericalangle MAF$. (4)

Das Maß des Winkels $\sphericalangle MCE$ ist $\frac{\gamma}{2}$, das des Winkels $\sphericalangle MBE$ ist $\frac{\beta}{2}$ und das des Winkels $\sphericalangle MAF$ ist $\frac{\alpha}{2}$, da CM bzw. BM bzw. AM die Winkelhalbierenden des Dreiecks ΔABC sind. Bezeichnet man das Maß den Winkels $\sphericalangle DEF$ mit δ, das des Winkels $\sphericalangle EFD$ mit ϵ und das des Winkels $\sphericalangle FDE$ mit η, dann gilt wegen (2) und (3) $\delta = \frac{\gamma+\beta}{2}$, wegen (2) und (4) $\epsilon = \frac{\gamma+\alpha}{2}$ und wegen (3) und (4) $\eta = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 050835:

Bezeichnet man die Masse der ersten Komponente mit m_1, die der zweiten mit m_2, die Temperatur der ersten Komponente mit t_1, die der zweiten mit t_2, so gilt für die Mischungstemperatur t_x unter den angegebenen Bedingungen:

$$t_x = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, t_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, t_2.$$

Unter Verwendung der gegebenen Maßzahlen erhält man also, wenn x die Maßzahl von t_x bezeichnet,

$$x = \frac{9}{15} \cdot 30 + \frac{6}{15} \cdot 85, \qquad \text{also}$$
$$x = 52.$$

Das Gemisch hat eine Temperatur von $t_x = 52°\,\mathrm{C}$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 050836:

a) Für die Konstruktion:

Analyse:

Wie die Figur zeigt, sind von dem Teildreieck ΔMBC zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt. Daher läßt es sich konstruieren, wodurch gleichzeitig a bestimmt wird. Damit ist aber, da $a + b$ gegeben ist, auch b bestimmt (wobei $a < a + b$ gelten muß), so daß die Konstruktion des Dreiecke ΔABC auf die Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel zurückgeführt ist.

b) Für die Beschreibung und Diskussion:

Beschreibung:

Man konstruiert das Teildreieck ΔMBC. Dabei gibt es folgende Fälle:

(1) $\alpha < 90°$. Dann läßt sich das Dreieck aus den Seiten MC (Länge r), MB (Länge r) und dem Winkel $\sphericalangle BMC$ (Winkelmaß 2α) konstruieren.

(2) $\alpha > 90°$. Dann gilt $2\alpha > 180°$. Das Teildreieck ΔMBC läßt sich in diesem Fall aus den Seiten MC (Länge r), MB (Länge r) und dem Winkel $\sphericalangle CMB$ (Winkelmaß δ) konstruieren, wobei $\delta = 360° - 2\alpha$ gilt.

(3) Für $\alpha = 90°$ gilt $a = 2r$. In diesem Falle läßt sich das Dreieck ΔABC sofort aus den Seiten BC (Länge $2r$), AC (Länge $a + b - a = b$) und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel $\sphericalangle BAC$ (Winkelmaß $\alpha = 90°$) konstruieren, wobei die Konstruktion für $b < 2r$, also $a + b < 4r$, und nur dann durchführbar ist. Das Dreieck ist in diesem Falle eindeutig bestimmt.

In den Fällen (1) und (2) erhält man mit dem Teildreieck ΔMBC auch die Seite BC (Länge a) und damit auch die Länge b der Seite AC. Man schlägt den Umkreis um M mit dem Radius r und mit dem Radius b um C einen Kreisbogen, der den Umkreis im Falle $b < 2r$ in den Punkten A und A' schneidet. Für $b = 2r$ haben beide Kreise genau einen Punkt, den Punkt A, gemeinsam, und für $b > 2r$ gibt es keine gemeinsamen Punkte beider Kreise. *Diskussion*

Im Falle $b = 2r$ gibt es genau ein Dreieck. Dieses wird durch die angegebene Konstruktion erhalten.

Wenn $b < 2r$ gilt, gibt es im Falle $\alpha < 90°$ für $b > a$ zwei zueinander inkongruente Dreiecke, für $b = a$ genau ein Dreieck (das andere artet zu einer Strecke aus) und für $b < a$ ebenfalls genau ein Dreieck, da wegen $2\alpha < 180°$ der Winkel $\sphericalangle BAC$ in derselben Halbebene in bezug auf die Gerade BC wie der Punkt M liegen muß.

Im Falle $90° < \alpha < 180°$ gibt es für $b \geq a$ kein Dreieck, das allen gestellten Bedingungen genügt, und für $b < a$ genau ein Dreieck, da wegen $180° < 2\alpha < 360°$ der Winkel $\sphericalangle BAC$ nicht in der gleichen Halbebene in bezug auf die Gerade BC wie der Punkt M liegen kann. Im Falle $b > 2r$ gibt es kein Dreieck, das allen gestellten Bedingungen genügt.

Die Entscheidung, welcher der drei Fälle eintritt, insbesondere also, ob es überhaupt ein solches Dreieck gibt, kann in den Fällen $\alpha \neq 90°$ auf geometrischem Wege erst nach der Konstruktion des stets konstruierbaren Hilfsdreiecks ΔBMC gefällt werden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Quellenverzeichnis

(15) "a+b = b+a" - Heft 66, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 8 - Dokumentation I.-XVIII. Olympiade (1961-1979), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1979.