5. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1965/1966

Aufgaben und Lösungen

5. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 050731:
Auf welche Ziffern endet das Produkt

$$z = 345\,926\,476^3 \cdot 125\,399\,676^2 \cdot 2\,100\,933\,776^3?$$

Aufgabe 050732:
Gegeben sind die voneinander verschiedenen Punkte A und B.

a) Konstruiere unter alleiniger Verwendung des Zirkels einen Punkt P, der auf der gleichen Geraden wie A und B liegt!

b) Beschreibe und begründe die Konstruktion!

Anmerkung: Die Konstruktionsbeschreibung soll kurz gehalten sein. Bei der Konstruktion von Dreiecken genügt die Angabe von Seiten und Winkeln, aus denen sich das Dreieck konstruieren läßt.

Aufgabe 050733:
Der Punkt M liege im Innern des Dreiecks ΔABC.

Beweise, daß für jeden solchen Punkt M $\epsilon > \alpha$ gilt, wenn ϵ ($< 180°$) das Maß des Winkels $\sphericalangle BMC$ und α das Maß des Winkels $\sphericalangle BAC$ ist!

Aufgabe 050734:
Berechne die Anzahl aller (untereinander verschiedener) vierstelligen Zahlen, die sich unter alleiniger Verwendung der Ziffern 1, 3 und 8 schreiben lassen! Dabei braucht nicht jede der Zahlen sämtliche der drei zugelassenen Ziffern zu enthalten.

Aufgabe 050735:
In dem Trapez $ABCD$ sei $AB \parallel DC$. Ferner gelte $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB}$. Beweise, daß die Diagonale $\overline{AC}$ den Winkel $\sphericalangle DAB$ halbiert!

Aufgabe 050736:
Ein Betrieb sollte in 20 Arbeitstagen p Werkstücke der gleichen Art herstellen. Durch Anwendung besserer Arbeitsmethoden gelang es den Arbeitern, diesen Auftrag bereits in 5 Arbeitstagen früher zu erfüllen und dabei noch k Werkstücke mehr als gefordert herzustellen.

Wieviel Werkstücke wurden durchschnittlich an jedem Arbeitstag über den Plan hinaus produziert?

5. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

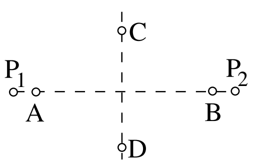
Lösung 050731:

Sämtliche Faktoren von z sind von der Form $100\,a + 76$. Wegen $(100\,a + 76)(100\,b + 76) = 10\,000\,ab + 100\,(76\,a + 76\,b) + 76^2$, wobei a und b natürliche Zahlen sind, sind allein die beiden letzten Stellen von 76^2 für die beiden letzten Stellen von z entscheidend.

Da $76^2 = 5\,776$ ist, endet z auf 76.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 050732:



a) Konstruktion.

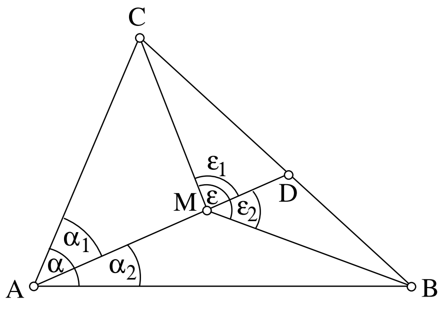
b) Für die Beschreibung und Begründung:

Die Länge der Strecke AB sei a. Man schlägt um A und B Kreisbögen mit dem gleichen Radius von der Länge $r > \frac{a}{2}$. Die beiden Schnittpunkte dieser Kreisbögen seien C und D, die Länge der Strecke CD sei b. Nun schlägt man um C und D Kreisbögen mit dem gleichen Radius $r_1 > \frac{b}{2}$. Die entstehenden Schnittpunkte P_1 und P_2 liegen auf der Geraden durch A und B und sind, falls $r_1 \neq r$ ist, von A und B verschieden.

Beweis: Die Gerade durch C und D ist auf Grund der Konstruktion Symmetrieachse zu der Strecke AB. Aus demselben Grund ist die Gerade durch A und B Symmetrieachse zu der Strecke CD. Da laut Konstruktion $\overline{CP_1} = \overline{DP_1}$ und $\overline{CP_2} = \overline{DP_2}$ gilt, liegen P_1 und P_2 auf der die Punkte A und B enthaltenden Symmetrieachse der Strecke CD. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 050733:



Die Gerade durch A und M schneide die Seite CB im Punkt D. D liegt zwischen C und B. Das Maß des Winkels $\sphericalangle CMD$ sei ϵ_1, das des Winkels $\sphericalangle CAM$ sei α_1, das des Winkels $\sphericalangle DMB$ sei ϵ_2 und das des Winkels $\sphericalangle MAB$ sei α_2. Dann gilt

(1) $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$; $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon$

(2) $\epsilon_1 > \alpha_1$ (nach dem Außenwinkelsatz)

(3) $\epsilon_2 > \alpha_2$ (nach dem Außenwinkelsatz)

und folglich wegen (2) und (3)

(4) $\epsilon_1 + \epsilon_2 > \alpha_1 + \alpha_2$ und wegen (1) und (4)

(5) $\epsilon > \alpha$ □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 050734:

Die erwähnten Zahlen können entweder

(1) 4 gleiche Ziffern oder

(2) genau 3 gleiche Ziffern oder

(3) 2 untereinander verschiedene Paare von gleichen Ziffern oder

(4) genau 2 gleiche Ziffern enthalten.

Da nur 3 verschiedene Ziffern zugelassen sind, erhält man im Falle (1) 3 verschiedene derartige Zahlen. Im Falle (2) gibt es für jeweils 3 gleiche Ziffern 4 verschiedene Möglichkeiten der Anordnung, wobei die 4. Ziffer jeweils eine der beiden anderen vorgegebenen Ziffern ist. Da 3 Ziffern vorgegeben wurden, beträgt im Falle (2) die Anzahl der derartigen vierstelligen Zahlen $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Im Falle (3) lassen sich die Ziffern der beiden Paare jeweils auf 6 verschiedene Weisen anordnen (nämlich *aabb*, *bbaa*, *abba*, *baab*, *abab*, *baba*). Da es 3 verschiedene Möglichkeiten der Zusammenstellung solcher Paare gibt, beträgt im Falle (3) die Anzahl der erwähnten vierstelligen Zahlen $6 \cdot 3 = 18$.

Im Falle (4) lassen sich die beiden gleichen Ziffern, wenn man die Reihenfolge der beiden übrigen, von ihnen verschiedenen Ziffern beibehält, auf 6 verschiedene Weisen anordnen (nämlich *aabc*, *bcaa*, *abca*, *baac*, *abac*, *baca*). Für die Reihenfolge der beiden übrigen Ziffern gibt es genau 2 Möglichkeiten (nämlich *bc* und *cb*). Da 3 verschiedene Paare gleicher Ziffern möglich sind, beträgt im Falle (4) die Anzahl der gesuchten vierstelligen Zahlen $6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$.

Die Anzahl aller derartigen Zahlen beträgt mithin $3 + 24 + 18 + 36 = 81$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 050735:

Sei $\sphericalangle BAD := \alpha$. Dann ist auch $\sphericalangle ABC = \alpha$, da $\overline{AD} = \overline{BC}$ und damit das Trapez gleichschenklig ist. Daraus ergibt sich analog: $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BCD = 180° - \alpha$.

Nun gilt, daß das Dreieck ΔACD gleichschenklig ist, da $\overline{AD} = \overline{CD}$. Mit $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACD := \beta$ gilt in diesem Dreieck:

$$\begin{aligned} \sphericalangle CAD + \sphericalangle ACD + \sphericalangle ADC &= 180° \quad \text{Innenwinkelsummensatz im Dreieck} \\ \beta + \beta + (180° - \alpha) &= 180° \\ \beta &= \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Damit halbiert β den Winkel α oder anders: die Diagonale AC halbiert den Winkel $\sphericalangle DAB$. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 050736:

Die Anzahl der durchschnittlich an jedem Arbeitstag laut Plan anzufertigenden Werkstücke beträgt $\frac{p}{20}$. In Wahrheit wurden aber $(p + k)$ Werkstücke in $(20 - 5)$ Tagen produziert, an jedem Arbeitstag also durchschnittlich $\frac{p+k}{15}$ Werkstücke.

Daher betrug die Anzahl der durchschnittlich an jedem Arbeitstag über den Plan hinaus angefertigten Werkstücke $\frac{p+k}{15} - \frac{p}{20} = \frac{p+4k}{60}$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.