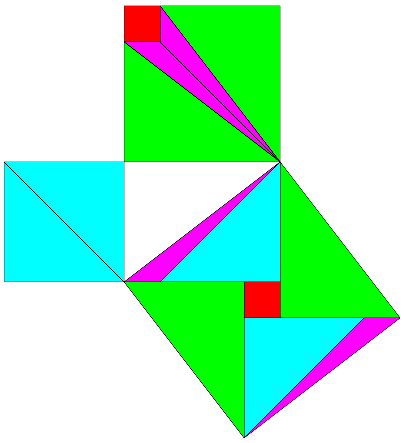
5. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1965/1966

Aufgaben und Lösungen



5. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 050711:

Zwei Jungen vergleichen ihre Ersparnisse. Sie stellen fest: $\frac{2}{3}$ von Peters Sparbetrag ist genausoviel wie $\frac{3}{4}$ von Rainers Sparbetrag. Wer hat mehr Geld gespart?

Aufgabe 050712:

Innerhalb eines Quadrats liegt ein konvexes Fünfeck. Es ist zu beweisen, daß der Umfang eines derartigen Fünfecks stets kleiner ist als der Umfang des Quadrats.

Aufgabe 050713:

Der Fahrer eines in der DDR zugelassenen Pkw beging nach einem Verkehrsunfall Fahrerflucht. Nach der Befragung einiger Zeugen erfuhr man über das polizeiliche Kennzeichen des Pkw folgendes:

a) Die beiden Buchstaben des Kennzeichens lauteten AB oder AD.

b) Die beiden vorderen Ziffern waren gleich und außerdem anders als die beiden letzten Ziffern.

c) Die aus den beiden letzten Ziffern gebildete Zahl war 69 oder 96.

Welches ist die größtmögliche Anzahl von Pkw, die diesen Bedingungen genügen können?

Aufgabe 050714:

Rolf stellt seinem Freund folgende Aufgabe:

Auf einem Schachturnier spielte jeder genau einmal gegen jeden. Insgesamt wurden 28 Partien gespielt.

Wieviel Teilnehmer gab es bei diesem Turnier?

5. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

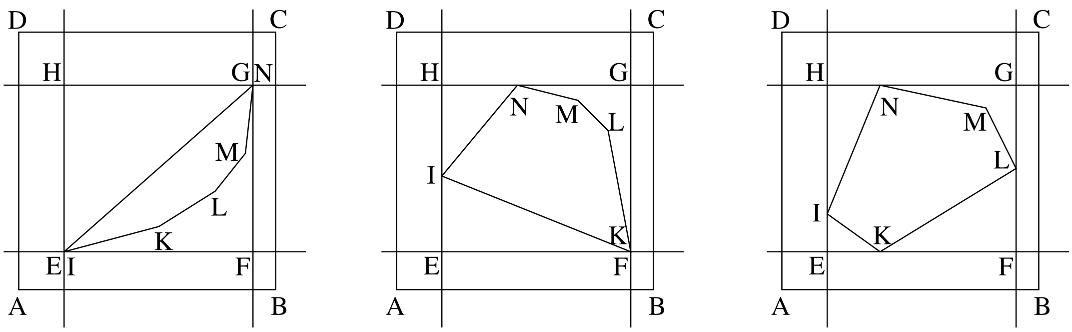
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

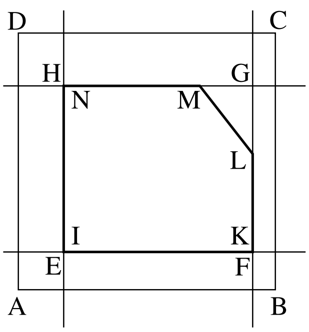
Lösung 050711:

Peters Geldbetrag sei p, Rainers r. Dann gilt $\frac{2}{3}p = \frac{3}{4}r$ und folglich $p = \frac{8}{9}r > r$, also hat Peter mehr Geld gespart als Rainer.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 050712:





$ABCD$ sei das gegebene Quadrat, $IKLMN$ das gegebene Fünfeck (siehe Abb.). Man verschiebt die Gerade durch AB parallel, bis sie zum ersten Mal durch einen Punkt des Fünfecks verläuft, aber nicht ins Innere des Fünfecks eintritt. Entsprechend verfährt man mit den Geraden durch BC, CD und AD.

Die vier so erhaltenen Geraden schneiden einander in den Punkten E, F, G und H, die Eckpunkte eines Rechtecks sind, das ganz im Innern von $ABCD$ liegt und daher einen kleineren Umfang als das Quadrat hat (jede Rechteckseite ist kürzer als die Quadratseite).

Von den Eckpunkten des Fünfecks liegen nun mindestens zwei auf dem Rande des Rechtecks. Man errichtet über jeder Fünfeckseite, die nicht auf dem Rande des Rechtecks liegt, je ein rechtwinkliges Dreieck mit folgenden Eigenschaften:

a) Die Fünfeckseite ist Hypotenuse,

b) die Katheten liegen parallel zu den Rechteckseiten (bzw. liegen auf den Rechteckseiten),

c) die Dreiecksfläche liegt außerhalb des Fünfecks.

Da das Fünfeck konvex ist, ist die Konstruktion derartiger Dreiecke stets möglich. Je zwei so konstruierte rechtwinklige Dreiecke haben dabei höchstens einen Eckpunkt gemeinsam. Die Summe der Längen aller Katheten dieser Dreiecke und der auf dem Rande des Rechtecks liegenden Fünfeckseiten ist, wie man leicht einsieht, gleich dem Umfang des Rechtecks EFGH (siehe Abb.).

Da höchstens vier Seiten des Fünfecks $IKLMN$ auf dem Rande des Rechtecks $EFGH$ liegen können, läßt sich stets mindestens ein solches rechtwinkliges Dreieck konstruieren. Nach der Dreiecksungleichung ist aber die Länge seiner Hypotenuse kleiner als die Summe der Längen seiner Katheten. Mithin ist der Umfang des Fünfecks $IKLMN$ kleiner als der des Rechtecks $EFGH$, und damit erst recht kleiner als der Umfang des Quadrats $ABCD$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 050713:

Für die beiden vorderen Ziffern gibt es unter den Bedingungen der Aufgabe 8 Möglichkeiten (alle außer 6 und 9). Jedes dieser 8 Ziffernpaare kann mit einer der 4 Kombinationen AB 69, AB 96, AD 69, AD 96 gekoppelt sein.

Daher ist die größtmögliche Anzahl der den Bedingungen der Aufgabe genügenden PKW $4 \cdot 8 = 32$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 050714:

Weil jeder genau einmal gegen jeden spielt, gilt, wenn n die Anzahl der Teilnehmer ist:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 28,$$

also $n(n-1) = 56$. Diese Gleichung wird von der natürlichen Zahl 8 erfüllt.

Da für beliebige natürliche Zahlen n zu größeren Werten n stets größere Werte von $n(n-1)$ gehören, gibt es außer 8 keine natürliche Zahl, die diese Gleichung befriedigt.

Also nahmen 8 Personen am Schachturnier teil.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.