4. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1964/1965

Aufgaben und Lösungen

4. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 041241:

Geben Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{p+x}+\sqrt{p-x}=x$$

an, wobei p eine positive reelle Zahl (Parameter) bedeutet!

Aufgabe 041242:

Es ist zu entscheiden, durch welche der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 109, 151, 491 die Zahl

$$z=1963^{1965}-1963 \text{ teilbar ist.}$$

Aufgabe 041243:

Im dreidimensionalen Raum sind zwei Parallelogramme $ABCD$ und $A'B'C'D'$ gegeben. Jedes Parallelogramm sei nicht entartet, d.h., seine 4 Eckpunkte sollen nicht auf ein und derselben Geraden liegen. Die durch die Parallelogramme bestimmten Ebenen brauchen nicht voneinander verschieden zu sein. Die Strecken AA', BB', CC' und DD' seien in demselben Verhältnis geteilt; die Teilpunkte seien A'', B'', C'', D''.

Welche Aussagen kann man über die aus den Punkten A'' , B'' , C'', D'' gebildete Figur machen?

Aufgabe 041244:

Ermitteln Sie den geometrischen Ort aller Punkte der Ebene, für die die Summe der Entfernungen von den Seiten eines in dieser Ebene gegebenen regelmäßigen Fünfecks oder ihren Verlängerungen fünfmal so groß wie der Radius des dem Fünfeck einbeschriebenen Keises ist!

Aufgabe 041245:

Ermitteln Sie alle Zifferntripel (x, y, z) mit $x, y, z \neq 0$, mit denen

$$\sqrt{(xxx...x)-(yyy...y)}=(zzz...z) \tag{1}$$

$(xxx...x)$: $2n$ Ziffern; $(yyy...y)$: n Ziffern; $(zzz...z)$: n Ziffern

für mindestens zwei voneinander verschiedene positive natürliche Zahlen n erfüllt ist! Geben Sie sodann alle Zahlen n an, für die (1) mit den ermittelten Tripeln gilt!

Aufgabe 041246:

Es ist folgender Satz zu beweisen:

Sind α, β und γ die Winkel eines Dreiecks, dann gilt:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\frac{3}{2}.$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

4. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 041241:

Angenommen, die reelle Zahl x sei eine Lösung der Gleichung. Da die Radikanden nicht negativ sein dürfen, und $\sqrt{p+x}+\sqrt{p-x} \geq 0$ ist, gilt $0 \leq x \leq p$. Durch zweimaliges Quadrieren der Ausgangsgleichung erhält man $x^4 + 4x^2(1-p) = 0$.

(1) $0 < p \leq 1$
Für $p \leq 1$ ist also notwendig $x = 0$. Für $p \leq 1$ kann es also außer $x = 0$ keine Lösung geben.

$Probe$: $\sqrt{p+x}+\sqrt{p-x} = 2\sqrt{p} > 0 = x$, weil p positiv. Damit gibt es bei $p \leq 1$ keine Lösung!

(2) $1 < p$
Für $p > 1$ könnten $x = 0$ und $x = 2\sqrt{p-1}$ Lösungen sein.

$Probe$: $x = 0$ ist ebenso wie im 1. Fall keine Lösung.
Teste nun $x = 2\sqrt{p-1}$:

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{p+x}+\sqrt{p-x} \\ &= \sqrt{p+2\sqrt{p-1}}+\sqrt{p-2\sqrt{p-1}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{p-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{p-1}-1)^2} \\ &= |\sqrt{p-1}+1|+|\sqrt{p-1}-1| \end{aligned}$$

Der Betrag des ersten Termes ist gleich dem Term selbst; der Betrag des zweiten Termes ist gleich dem Term selbst für $2 \leq p$ und dem Negativen dessen für $1 < p < 2$. Wir erhalten also für $1 < p < 2$:

$$s = \sqrt{p-1}+1+1-\sqrt{p-1} = 2 \neq 2\sqrt{p-1}$$

Für $2 \leq p$ ist $s = \sqrt{p-1}+1+\sqrt{p-1}-1 = 2\sqrt{p-1} = x$ und damit die einzige Lösung.

Die einzige Lösung dieser Gleichung ist $x = 2\sqrt{p-1}$ für den Fall, daß $p \geq 2$ gilt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 041242:

Es gilt nach binomischer Formel:

$$\begin{aligned} z &= 1963^{1965} - 1963 = 1963(1963^{1964} - 1) \\ &= 1963 \cdot (1963^{982}+1) \cdot (1963^{491}+1) \cdot (1963^{491}-1) \\ &= 13 \cdot 151 \cdot (1963^{982}+1) \cdot (1963^{491}+1) \cdot (1963^{491}-1) \end{aligned}$$

Wegen $a^k - 1 = (a-1)(a^{k-1} + ... + 1)$ für jedes positive, ganze k und $a^k + 1 = (a+1)(a^{k-1} - ... + 1)$ für jede ungerade natürliche Zahl k, gilt: $z = 1962 \cdot 1963 \cdot 1964 \cdot P$, wobei P das Produkt der übrigen Faktoren ist.

Wegen $1962 = 2 \cdot 3^2 \cdot 109$, $1963 = 13 \cdot 151$, $1964 = 2^2 \cdot 491$ ist z durch **2, 3, 13, 109, 151, 491** teilbar. Es ist jetzt nur noch zu untersuchen, ob z auch durch 5, 7, 11 teilbar ist.

a) Teilbarkeit durch 5:

$$\begin{aligned} 1963^{1965} - 1963 &\equiv 3^{1965} - 3(5) \\ &\equiv 3 \cdot 3^{4\cdot 491} - 3(5) \\ &\equiv 3 \cdot 1^{491} - 3 \equiv 0(5) \end{aligned}$$

Damit ist z durch **5** teilbar.

a) Teilbarkeit durch 7:

$$\begin{aligned} 1963^{1965} - 1963 &\equiv 3^{1965} - 3(7) \\ &\equiv 3^3 \cdot 3^{6\cdot 327} - 3(7) \\ &\equiv 6 \cdot 1^{327} - 3 \equiv 3(7) \end{aligned}$$

Damit ist z nicht durch 7 teilbar.

a) Teilbarkeit durch 11:

$$\begin{aligned} 1963^{1965} - 1963 &\equiv 5^{1965} - 5(11) \\ &\equiv 5^{5\cdot 393} - 5(11) \\ &\equiv 1^{393} - 5 \equiv -4(11) \end{aligned}$$

Damit ist z nicht durch 11 teilbar.

Damit ist z bzgl. aller zu untersuchenden Teiler nur durch 7 und 11 nicht teilbar.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 041243:

Die vier Punkte A, B, C, D bilden genau dann ein Parallelogramm (bzgl. dieser Reihenfolge entlang des Vierecksrandes), wenn $B - A = C - D$ und $C - B = D - A$ gilt, d.h. wenn es zwei Vektoren s_1, s_2 gibt, so dass

$$B = A + s_1, \quad C = A + s_1 + s_2, \quad D = A + s_2 (1) \qquad (1)$$

gilt. Nach Voraussetzung gibt es zwei solche Vektoren sowie analog Vektoren s_1', s_2', so dass

$$B' = A' + s_1', \quad C' = A' + s_1' + s_2', \quad D' = A' + s_2'.(2) \qquad (2)$$

Dass die Parallelogramme nach Voraussetzung nicht entartet sind, bedeutet, dass s_1 und s_2 sowie s_1' und s_2' jeweils linear unabhängig sind (das ist hier allerdings irrelevant).
Dass A'' auf der Strecke AA' liegt, ist äquivalent zur Existenz eines $\lambda \in [0, 1]$, so dass $A'' = (1-\lambda)A + \lambda A'$.
Dass A'', B'', C'' und D'' den gleichen Teilungsparameter haben, bedeutet

$$\exists \lambda : \quad \begin{array}{ll} A'' = (1-\lambda)A + \lambda A', & B'' = (1-\lambda)B + \lambda B', \\ C'' = (1-\lambda)C + \lambda C', & D'' = (1-\lambda)D + \lambda D'. \end{array} (3) \qquad (3)$$

Einsetzen von (1) und (2) in (3) liefert

$$B'' = A'' + s_1'', \; C'' = A'' + s_1'' + s_2'', \; D'' = A'' + s_2''$$

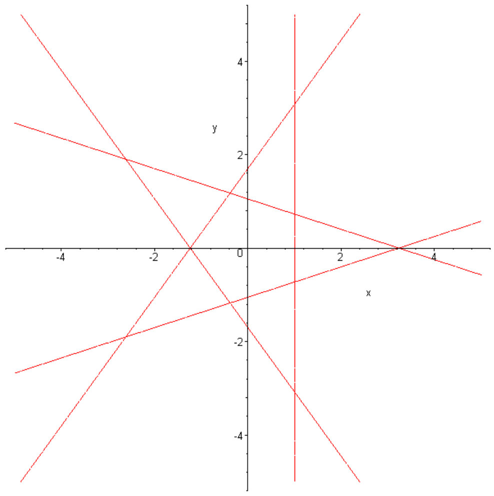
mit

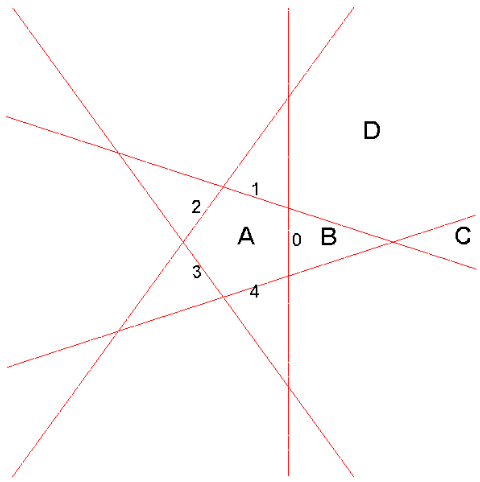
$$s_1'' = (1-\lambda)s_1 + \lambda s_1',\ s_2'' = (1-\lambda)s_2 + \lambda s_2',$$

d.h. $A''B''C''D''$ ist immer ein Parallelogramm, unabhängig vom Teilungsverhältnis und der relativen Lage und Form der gegebenen Parallelogramme.
Ansonsten kann man keine allgemeinen Aussagen machen. Z.B. kann das neue Parallelogramm entartet sein (z.B. wenn die beiden gegebenen Parallelogramme in einer Ebene liegen, spiegelsymmetrisch zueinander sind und die Teilungspunkte jeweils die Mittelpunkte sind), oder es können Sonderfälle wie Rechtecke und Quadrate entstehen, obwohl die Ausgangsparallelogramme keine Rechtecke sind. Aber es muss i.A. keinen Teilungsparameter λ geben, für den $A''B''C''D''$ entartet oder ein Rechteck ist (gehen z.B. die beiden Ausgangsparallelogramme durch eine Translation ineinander über, dann sind alle entstehenden Parallelogramme ihnen ähnlich, d.h. nie entartet und i.A. kein Rechteck).

Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Müller

Lösung 041244:





Zur bequemeren Rechnung wählen wir das Koordinatensystem der Fünfecksebene so, dass der Mittelpunkt der Schwerpunkt des Fünfecks und die positive x-Achse eine Fünfecksseite in deren Mittelpunkt schneidet (s. obere Abb.). Der nach „außen“ gerichtete normierte Normalenvektor der (verlängerten) i-ten Fünfecksseite s_i ($i = 0, \dots, 4$ gemäß unterer Abb.) ist $(\cos\phi_i, \sin\phi_i)$ mit $\phi_i = 2\pi i/5$. Mit den Funktionen

$$f_i(x, y) := x\cos\phi_i + y\sin\phi_i - r.$$

ist $f_i(x, y) = 0$ die implizite Gleichung von s_i und $|f_i(x, y)|$ der Abstand eines Punktes (x, y) von s_i, wobei $r > 0$ der Radius des Inkreises des Fünfecks ist (in der oberen Abbildung ist $r = 1$, was man o.B.d.A. annehmen könnte, ohne jedoch die Rechnung merklich zu vereinfachen).
Die gesuchte Punktmenge ist damit beschreibbar durch die Gleichung

$$f(x, y) = 5r \quad \text{mit } f = |f_0| + |f_1| + |f_2| + |f_3| + |f_4|.$$

Für die f_i verwenden wir die folgende Tabelle:

i	ϕ_1	$\cos(\phi_i)$	$\sin(\phi_i)$	$f_i(x, y)$
0	0	1	0	$x - r$
1	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) =: a_1$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} =: b_1$	$a_1x + b_1y - r$
2	$\frac{4}{5}\pi$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1) =: -a_2$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} =: b_2$	$-a_2x + b_2y - r$
3	$\frac{6}{5}\pi$	$-a_2$	$-b_2$	$-a_2x - b_2y - r$
4	$\frac{8}{5}\pi$	a_1	$-b_1$	$a_1x - b_1y - r$

Manche der Werte stehen direkt in Formelsammlungen (z.B. bei *functions.wolfram.com*), die übrigen ergeben sich aus Additionstheoremen und Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen.
Wegen der Betragsfunktionen ist f nicht einfach handhabbar. Wir benutzen, dass die fünf Geraden s_i die Ebene in 16 Gebiete zerlegen, in denen jeweils keine der fünf Funktionen f_i ihr Vorzeichen wechselt (wir betrachten jeweils den Rand des Gebietes als zum Gebiet gehörig). Wegen der fünfzähligen Rotationssymmetrie müssen wir nur vier verschiedene Gebiete betrachten, z.B. die Gebiete A, B, C und D in der unteren Abbildung.
Betrachten wir zunächt den Fall $(x, y) \in A$ (das Fünfeck selbst). Hier gilt

$$f_0(x, y) \le 0,\ f_1(x, y) \le 0,\ f_2(x, y) \le 0,\ f_3(x, y) \le 0,\ f_4(x, y) \le 0.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -f_0(x, y) - f_1(x, y) - f_2(x, y) - f_3(x, y) - f_4(x, y) \\ &= -(x - r) - (a_1x + b_1y - r) - (-a_2x + b_2y - r) \\ &\quad -(-a_2x - b_2y - r) - (a_1x - b_1y - r) \\ &= 5r + (2a_2 - 2a_1 - 1)x \ = \ 5r. \end{aligned}$$

Die Gleichung $f(x, y) = 5r$ ist also in A identisch erfüllt, d.h. die ganze Menge A gehört zur gesuchten Punktmenge.
Sei nun $(x, y) \in B$. Dann ist $f_0 \ge 0,\ f_1 \le 0,\ f_2 \le 0,\ f_3 \le 0,\ f_4 \le 0$, also

$$f(x, y) = f_0(x, y) - f_1(x, y) - f_2(x, y) - f_3(x, y) - f_4(x, y) = 5r + 2f_0(x, y).$$

$f(x, y) = 5r$ gilt daher in B genau dann, wenn $f_0(x, y) = 0$ ist, also entlang der gemeinsamen Strecke mit A, so dass wir keine zusätzlichen Lösungen erhalten.
Sei nun $(x, y) \in C$. Dann ist $f_0 \ge 0,\ f_1 \ge 0,\ f_2 \le 0,\ f_3 \le 0,\ f_4 \ge 0$, also

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_0(x, y) + f_1(x, y) - f_2(x, y) - f_3(x, y) + f_4(x, y) \\ &= 5r + 2f_0(x, y) + 2f_1(x, y) + 2f_4(x, y). \end{aligned}$$

$f(x, y) = 5r$ gilt daher in C genau dann, wenn

$$f_0(x, y) + f_1(x, y) + f_4(x, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ x - r + a_1x + b_1y - r + a_1x - b_1y - r = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \frac{3}{2}(\sqrt{5} - 1)r.$$

Der Punkt mit dem niedrigsten x-Wert in C ist jedoch $((\sqrt{5} - 1)r, 0)$, der Schnittpunkt der Seiten s_1 und s_4, also hat $f(x, y) = 5r$ keine Lösungen in C.

Sei nun $(x, y) \in D$. Dann ist $f_0 \geq 0,\ f_1 \geq 0,\ f_2 \leq 0,\ f_3 \leq 0,\ f_4 \leq 0$, also

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f_0(x,y) + f_1(x,y) - f_2(x,y) - f_3(x,y) - f_4(x,y) \\ &= 5r + 2f_0(x,y) + 2f_1(x,y). \end{aligned}$$

$f(x, y) = 5r$ gilt also in C genau dann, wenn

$$f_0(x,y) + f_1(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow\ (a_1+1)x + b_1 y - 2r = 0.$$

Diese Gerade enthält den Eckpunkt des Fünfecks, der A und D gemeinsam ist, und verläuft senkrecht zur Symmetrieachse von D, so dass sie keine weiteren Lösungspunkte liefert.

Die gesuchte Punktmenge ist also das Fünfeck selbst (Rand und Inneres).

Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Müller

Lösung 041245:
Da wir nur mit positiven Zahlen rechnen, können wir beide Seiten von (1) quadrieren:

$$\begin{aligned} (1) \ &\Leftrightarrow\ (xxx\dots x) - (yyy\dots y) = (zzz\dots z)^2 \\ &\Leftrightarrow\ \frac{1}{9}(10^{2n}-1)x - \frac{1}{9}(10^n-1)y = \left(\frac{1}{9}(10^n-1)z\right)^2 \\ &\Leftrightarrow\ \quad (10^n+1)x - y = \frac{1}{9}(10^n-1)z^2.(2) \end{aligned} \tag{2}$$

Im Sonderfall $n = 1$ wird (2) zu $11x = z^2 + y$, und durch Einsetzen findet man, dass es zu jeder Ziffer $z > 1$ genau ein y gibt, so dass die rechte Seite durch 11 teilbar ist. Diese Lösungen sind in der Tabelle (**??**) aufgeführt.
Für $n \geq 2$ betrachten wir (2) modulo 100 (beachte $\frac{1}{9}(10^n - 1) = 111\dots1 \equiv 11$):

$$x - y = 11z^2.(3) \tag{3}$$

Für $z = 1, 2, \dots, 9$ ist $11z^2$ modulo 100 gleich $11, 44, 99, 76, 75, 96, 39, 4, 91$. $x - y$ kann aber nur die Werte $0, \dots, 8$ oder $92, \dots, 99$ annehmen. Also sind nur Lösungen mit $z = 3$, $z = 6$ oder $z = 8$ möglich. $x - y$ muss dann gleich -1, -4 bzw. $+4$ sein (nicht nur modulo 100).
Ob diese notwendige Bedingung auch hinreichend ist, prüfen wir durch Einsetzen in (2). $z = 3$, $y = x + 1$ liefert $10^n x = 10^n$, also $x = 1$, d.h. $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ ist eine Lösung für alle n. $z = 6$, $y = x + 4$ liefert $10^n x = 10^n \cdot 4$, also $x = 4$, d.h. $(x, y, z) = (4, 8, 6)$ ist eine Lösung für alle n. $z = 8$, $y = x - 4$ führt auf $10^n x = \frac{1}{9}(10^n - 1) \cdot 64 - 4$, was äquivalent zu $9 \cdot 10^n x = 64 \cdot 10^n - 100$ ist. Für $n \geq 3$ ist diese Gleichung nicht erfüllbar (wie man modulo 1000 sieht), für $n = 2$ wird die Gleichung zu $9x = 63$, also ist $(x, y, z) = (7, 3, 8)$ eine zusätzliche Lösung für $n = 2$.
Die folgende Tabelle enthält alle Lösungsquadrupel (n, x, y, z). Die 2. und die 5. Zeile sind eigentlich überflüssig, da es Spezialfälle der beiden letzten Zeilen sind, und wurden nur zur Nachvollziehbarkeit der Herleitung aufgenommen.

n	x	y	z
1	1	7	2
1	1	2	3
1	2	6	4
1	3	8	5
1	4	8	6
1	5	6	7
1	6	2	8
1	8	7	9
2	7	3	8
bel.	1	2	3
bel.	4	8	6

(4)

Aus dieser Tabelle aller Lösungen von (1) ist auch die Antwort auf die Aufgabenstellung zu entnehmen: die einzigen Tripel (x, y, z), die Lösung von (1) für mindestens zwei verschiedene n sind, sind $(1, 2, 3)$ und $(4, 8, 6)$. Für diese Tripel gilt (1) für alle positiven natürlichen Zahlen n.

Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Müller

Lösung 041246:
Ich eliminiere zunächst die Winkel über den Cosinussatz und bringe die Gleichung in geeignete Form.

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}\\
\Longleftrightarrow\ & 2abc\cos\alpha + 2abc\cos\beta + 2abc\cos\gamma \le 3abc\\
\Longleftrightarrow\ & a(b^2 + c^2 - a^2) + b(a^2 + c^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) \le 3abc\\
\Longleftrightarrow\ & ab^2 + ac^2 - a^3 + ba^2 + bc^2 - b^3 + ca^2 + cb^2 - c^3 \le 3abc\\
\Longleftrightarrow\ & 0 \le 2 \cdot (3abc + a^3 + b^3 + c^3 - ab^2 - ac^2 - ba^2 - bc^2 - ca^2 - cb^2)\\
\Longleftrightarrow\ & 0 \le (a + b - c)(a - b)^2 + (b + c - a)(b - c)^2 + (a + c - b)(a - c)^2
\end{aligned}$$

Die Ungleichung ist offensichtlich wahr, da im Dreieck $a + b - c > 0$, $b + c - a > 0$ und $a + c - b > 0$ gilt.

Gleichheit tritt dann ein, wenn $(a - b)^2 = 0$, $(b - c)^2 = 0$ und $(a - c)^2 = 0$, also $a = b = c$ gilt. Und tatsächlich gilt im gleichseitigen Dreieck:

$$\cos 60^\circ + \cos 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{3}{2}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Daniel Gutekunst

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission