# 4. Mathematik Olympiade
# 3. Stufe (Bezirksolympiade)
# Klasse 12
# Saison 1964/1965

Aufgaben und Lösungen

# 4. Mathematik-Olympiade
# 3. Stufe (Bezirksolympiade)
# Klasse 12
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 041231:

In einem mathematischen Zirkel einigen sich sechs Teilnehmer auf eine reelle Zahl $a$, die der siebente Teilnehmer, der vorher das Zimmer verlassen hatte, bestimmen soll. Nach seiner Rückkehr erhält er die folgenden Auskünfte:

1) $a$ ist eine rationale Zahl.
2) $a$ ist eine ganzrationale Zahl, die durch 14 teilbar ist.
3) $a$ ist eine reelle Zahl, deren Quadrat gleich 13 ist.
4) $a$ ist eine ganzrationale Zahl, die durch 7 teilbar ist.
5) $a$ ist eine reelle Zahl, die folgende Ungleichung erfüllt. $0 < a^3 + a < 8\,000$.
6) $a$ ist eine gerade Zahl.

Er erfährt, daß von den Auskünften 1 und 2, 3 und 4 sowie 5 und 6 jeweils eine wahr und eine falsch ist.

Wie lautet die Zahl $a$! Wie hat der siebente Teilnehmer die Zahl ermittelt?

Aufgabe 041232:

Es sei $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ mit reellen Zahlen $a$, $b$, $c$, $d$ als Koeffizienten ($c \neq 0$).

Für welche reellen Zahlen $x$ wird durch die Zuordnung $x \to y = f(x)$ eine Funktion definiert? Ohne Anwendung der Differentialrechnung ist anzugeben, welchen Bedingungen die Koeffizienten $a$, $b$, $c$, $d$ genügen müssen, damit diese Funktion in jedem ihrer Definitionsbereiche streng monoton abnehmend ist.

Aufgabe 041233:

Gegeben sind in der Ebene eine Gerade $g$ und zwei Punkte $A$ und $B$, die nicht auf $g$, jedoch in derselben durch $g$ bestimmten Halbebene liegen.

Durch Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) ist ein Punkt $P$ auf $g$ zu finden, von dem aus die Strecke $AB$ unter einem möglichst großen Winkel erscheint, d.h. für den $\sphericalangle APB \geq \sphericalangle AQB$ für alle $Q \in g$ gilt.

Aufgabe 041234:

Für welche reellen Zahlen $x$ ist die Gleichung

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 6$$

erfüllt?

Aufgabe 041235:

Gibt es eine natürliche Zahl $z$, die auf zwei verschiedene Weisen in der Form

$$z = x! + y!$$

dargestellt werden kann, wobei $x$ und $y$ von Null verschiedene natürliche Zahlen sind und $x \leq y$ ist?

Aufgabe 041236:

Gegeben sind im dreidimensionalen Anschauungsraum drei Kreise, die einander paarweise in drei verschiedenen Punkten berühren, d.h., je zwei Kreise haben genau einen gemeinsamen Punkt und in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente.

Es ist zu beweisen, daß unter diesen Voraussetzungen die drei Kreise entweder in *einer* Ebene oder auf der Oberfläche *einer* Kugel liegen.

# 4. Mathematik-Olympiade
# 3. Stufe (Bezirksolympiade)
# Klasse 12
# Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 041231:

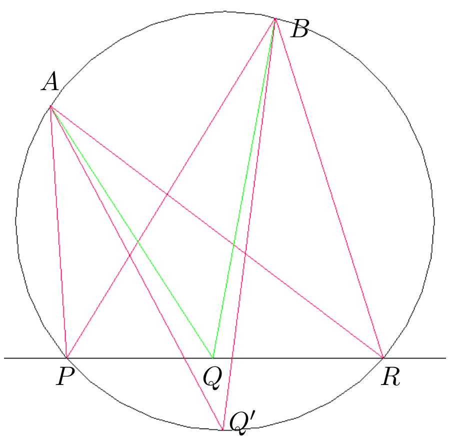
*Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)*

Lösung 041232:

*Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)*

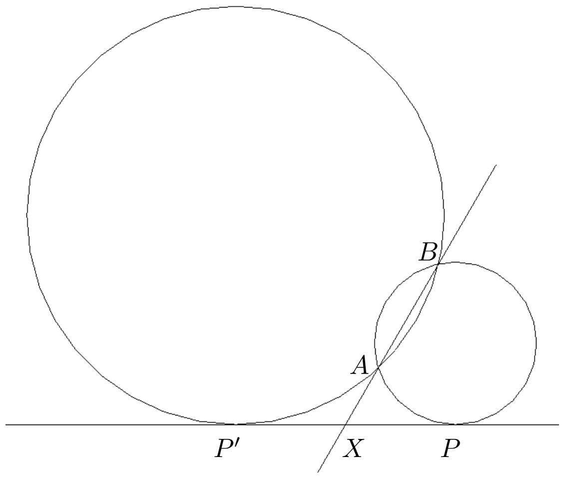
Lösung 041233:

Auch wenn es in der Aufgabenstellung nicht explizit gesagt wird, können wir annehmen, dass $A$ und $B$ verschieden sind, denn sonst ist $\sphericalangle APB = 0$ für alle $P \in g$ und die Aufgabe ziemlich sinnlos. Wenn $P$ auf der Geraden $AB$ liegt, dann ist $\sphericalangle APB = 0$, was nicht maximal ist. Also liegt der gesuchte Punkt nicht auf $AB$, so dass es einen eindeutigen Kreis $k$ durch $A$, $B$ und $P$ gibt.

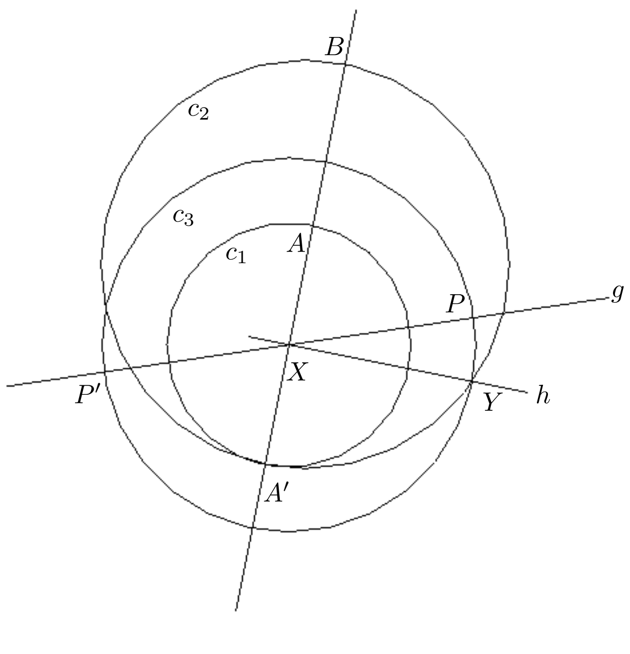



Angenommen, $k$ schneidet $g$ in einem weiteren Punkt $R$ wie in der obigen Abbildung. Nach Peripheriewinkelsatz ist $\sphericalangle APB = \sphericalangle ARB = \sphericalangle AQ'B$, und wegen $\sphericalangle BAQ < \sphericalangle BAQ'$ und $\sphericalangle ABQ < \sphericalangle ABQ'$ ist $\sphericalangle AQB > \sphericalangle AQ'B = \sphericalangle APB$, also efüllt $P$ nicht die verlangte Bedingung.

Der gesuchte Punkt $P$ ist demnach dadurch gekennzeichnet, dass der Kreis $k$ durch $A$, $B$ und $P$ die Gerade $g$ in $P$ berührt. Dieser Sonderfall des Apollonischen Kreisproblems hat i.A. zwei Lösungen. Die folgende Abbildung zeigt ein Beispiel.




Speziell zu behandeln ist der Fall, dass $AB$ parallel zu $g$ ist. Dann kann nur ein $A$ und $B$ enthaltender Kreis $g$ berühren, der Berührpunkt $P$ ist wegen der Symmetrie der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$ mit $g$.
Im folgenden betrachten wir den allgemeinen Fall, dass $AB$ nicht parallel zu $g$ ist, so dass ein eindeutiger Schnittpunkt $X$ von $AB$ und $g$ existiert. Da $A$ und $B$ nach Voraussetzung auf der gleichen Seite von $g$ liegen, liegt $X$ außerhalb jedes $A$ und $B$ enthaltenden Kreises $k$ (wie in obiger Abbildung). Da $g$ eine Tangente an $k$ im gesuchten Punkt $P$ sein soll und $X$ enthält, muss $XA \cdot XB = XP^2$ gelten (allgemeiner Satz über Sehnen und Tangenten). Der gesuchte Punkt $P$ liegt demnach im berechenbaren Abstand $\sqrt{XA \cdot XB}$ von $X$ auf $g$. Es gibt zwei solche Punkte $P$ und $P'$, die lokale Maxima des Winkels sind, unter dem $AB$ erscheint. Das globale Maximum liegt in dem Punkt $P$, für den der Kreis $k$ kleiner ist, also so, dass $\sphericalangle PXA < \sphericalangle P'XA$. Im symmetrischen Sonderfall, dass $AB$ senkrecht zu $g$ ist, ist der Winkel in beiden Punkten gleich groß, d.h. es gibt zwei verschiedene Lösungen.
Da wir nun wissen, wie der Punkt $P$ berechnet wird, können wir ihn auch wie folgt konstruieren. Die Abbildung zeigt die wesentlichen Konstruktionsschritte, ein paar Hilfskonstruktionen wurden zur Übersichtlichkeit weggelassen.



1. Schneide die Gerade $AB$ mit $g$, der Schnittpunkt sei $X$ (der Fall, dass $AB$ parallel zu $g$ ist, wurde oben behandelt und hier ausgeschlossen). In der Abbildung liegt $A$ zwischen $X$ und $B$, was o.B.d.A. angenommen werden kann, aber auch keinen Unterschied macht.

2. Schlage um $X$ einen Kreis $c_1$ durch $A$, der von $A$ verschiedene Schnittpunkt mit $AB$ sei $A'$.

3. Konstruiere den Thaleskreis $c_2$ durch $A'$ und $B$. Dazu lege man einen Kreis um $A'$ durch $B$ und einen Kreis um $B$ durch $A'$ und verbinde die beiden Schnittpunkte dieser Kreise. Der Schnitt der Verbindungsgeraden mit $A'B$ ist der Kreismittelpunkt (diese beiden Hilfskreise und die Verbindungsgerade sind in der Abbildung nicht gezeichnet).

4. Konstruiere die Gerade $h$, die $X$ enthält und senkrecht zu $AB$ ist. Da $XA = XA'$, ist $h$ die Mittelsenkrechte von $A$ und $A'$, also gehe man vor wie bei der Konstruktion von $c_2$ (die beiden Hilfskreise sind wieder in der Abbildung weggelassen).

5. $Y$ sei ein Schnittpunkt von $h$ und $c_2$ (es ist egal, welchen von beiden man verwendet). Da $Y$ auf dem Thaleskreis von $A'$ und $B$ liegt, hat das Dreieck $A'BY$ in $Y$ einen rechten Winkel. Ferner ist $h$ die Höhe des Dreiecks durch $Y$ und $X$ der Fußpunkt dieser Höhe. Nach dem Höhensatz von Euklid gilt $XY^2 = XA' \cdot XB = XA \cdot XB$ wegen $XA = XA'$.

6. Schlage um $X$ einen Kreis $c_3$ durch $Y$. Die Schnittpunkte des Kreises mit $g$ sind die Punkte $P$ und $P'$, denn $XP = XP' = XY = \sqrt{XA \cdot XB}$.

*Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Müller*

Lösung 041234:

Wegen $\tan(x + \frac{\pi}{2}) = -\cot x$ und $\cot(x + \frac{\pi}{2}) = -\tan x$ ist

$$\tan^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cot^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \tan^2 x + \cot^2 x,$$

und wegen $\tan(\frac{\pi}{4} \pm x) = \cot(\frac{\pi}{4} \mp x)$ ist

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cot^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cot^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right),$$

d.h. $\tan^2 x + \cot^2 x$ ist $\frac{\pi}{2}$-periodisch und symmetrisch zu $x = \frac{\pi}{4}$. Wir müssen daher Lösungen von $\tan^2 x + \cot^2 x = 6$ nur im Intervall $I = (0, \frac{\pi}{4}]$ suchen (0 ausgeschlossen wegen Definitionslücke).
Die gegebene Gleichung ist

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} &=& \; 6 \\
\Leftrightarrow \quad & \sin^4 x + \cos^4 x &=& \; 6 \sin^2 x \cos^2 x \\
\Leftrightarrow \quad & (1 - \cos^2 x)^2 + \cos^4 x &=& \; 6(1 - \cos^2 x)\cos^2 x \\
\Leftrightarrow \quad & 2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 &=& \; 6\cos^2 x - 6\cos^4 x \\
\Leftrightarrow \quad & \cos^4 x - \cos^2 x + \frac{1}{8} &=& \; 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \cos^2 x &=& \; \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \\
\Leftrightarrow \quad & \cos x &=& \; \frac{\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}{2}
\end{aligned}$$

Die letzte Umformung gilt, da cos auf $I$ positiv ist. $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ hat keine Lösung in $I$, weil cos auf $I$ streng monoton fällt und $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} > \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ gilt. Also hat die Ausgangsgleichung in $I$ nur eine Lösung, nämlich

$$x = \arccos\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen

$$\cos\frac{\pi}{8} = \cos\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2}}.$$

Wegen der anfangs genannten Symmetrie und Periodizität ist die Menge aller reellen Lösungen

$$\left\{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right\} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\mathbb{Z} = \left\{\pm\frac{\pi}{8}, \pm\frac{3\pi}{8}, \pm\frac{5\pi}{8}, \dots\right\}$$

*Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Müller*

Lösung 041235:

*Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)*

Lösung 041236:

Vorbemerkung: daraus, dass die drei Kreise paarweise genau einen gemeinsamen Punkt haben und die drei Berührpunkte verschieden sind, folgt insbesondere, dass kein Kreis zu einem Punkt degeneriert ist und keine zwei Kreise identisch sind.

Die Kreise bezeichnen wir als $k_1, k_2, k_3$, den Punkt $k_1 \cap k_2$ als $P_{12}$, die gemeinsame Tangente von $k_1$ und $k_2$ in $P_{12}$ als $t_{12}$. Analog sind $P_{23}, P_{13}, t_{23}$ und $t_{13}$ definiert.

Zunächst nehmen wir an, dass zwei der Kreise in einer Ebene liegen, o.B.d.A. seien dies $k_1$ und $k_2$. In dieser Ebene müssen dann auch die Geraden $t_{13}$ und $t_{23}$ liegen. Sie müssen verschieden sein, denn sonst würde die Gerade $t_{13} = t_{23}$ den Kreis $k_3$ in den beiden verschiedenen Punkten $P_{13}$ und $P_{23}$ berühren, was nicht möglich ist. Also hat die $k_3$ enthaltende Ebene zwei verschiedene Geraden mit der $k_1$ und $k_2$ enthaltenden Ebene gemeinsam. Das ist nur dann möglich, wenn beide Ebenen identisch sind. Wenn also zwei der drei Kreise in einer Ebene liegen, dann liegen alle drei Kreise in dieser Ebene.

Nun betrachten wir den Fall, dass keine zwei Kreise in einer gemeinsamen Ebene liegen. Zu zeigen ist, dass dann alle drei Kreise auf einer einzigen Kugel liegen. $E_{12}$ sei die zu $t_{12}$ senkrechte Ebene durch $P_{12}$, d.i. die gemeinsame Symmetrieebene von $k_1$ und $k_2$. Für $i = 1, 2, 3$ sei die „Mittelsenkrechte“ $m_i$ des Kreises $k_i$ die Menge aller Punkte, die von jeweils allen Punkten des Kreises den gleichen Abstand haben, d.i. die Gerade senkrecht zur Kreisebene durch den Kreismittelpunkt. Da $k_1$ und $k_2$ symmetrisch zu $E_{12}$ liegen, enthält $E_{12}$ die Geraden $m_1$ und $m_2$. Diese Geraden sind nicht parallel (und insbesondere nicht identisch), da sonst die Ebenen der Kreise $k_1$ und $k_2$ parallel und somit gleich wären, und schneiden sich daher in genau einem Punkt $M_{12}$. Nach Konstruktion hat $M_{12}$ sowohl von allen Punkten aus $k_1$ als auch von allen Punkten aus $k_2$ den gleichen Abstand. Da die Kreise $k_1$ und $k_2$ einen Punkt gemeinsam haben, hat $M_{12}$ von allen Punkten aus $k_1 \cup k_2$ den gleichen Abstand, den wir als $r_{12}$ bezeichnen.

Völlig analog schneiden sich $m_2$ und $m_3$ in einem Punkt $M_{23}$, der von allen Punkten aus $k_2 \cup k_3$ den konstanten Abstand $r_{23}$ hat, und $m_1$ und $m_3$ schneiden sich in einem Punkt $M_{13}$, der von allen Punkten aus $k_1 \cup k_3$ den konstanten Abstand $r_{13}$ hat. Wenn die drei Punkte $M_{12}$, $M_{23}$ und $M_{13}$ nicht paarweise verschieden sind, dann sind sie alle drei gleich (denn z.B. aus $M_{12} = M_{23}$ folgt, dass $m_1$ den Punkt $m_2 \cap m_3$ enthält), so dass $r_{12} = r_{23} = r_{13}$. Dann liegen alle drei Kreise auf der Kugel mit Radius $r_{12}$ um $M_{12}$.

Dass die Punkte $M_{12}$, $M_{23}$ und $M_{13}$ immer gleich sind, zeigen wir durch einen indirekten Beweis, indem wir annehmen, dass sie paarweise verschieden sind. $M_{23}$ und $M_{13}$ liegen auf $m_1$ bzw. $m_2$ und damit in der von diesen Geraden aufgespannten Ebene $E_{12}$. $m_3$ hat also zwei verschiedene Punkte mit dieser Ebene gemeinsam und liegt daher in dieser Ebene, die folglich mit den analog definierten Ebenen $E_{23}$ und $E_{13}$ identisch ist. Damit liegen außer $P_{12}$ auch die Punkte $P_{23}$ und $P_{13}$ in dieser Ebene $E = E_{12} = E_{23} = E_{13}$. Da $E$ mit jedem der Kreise nur zwei Punkte gemeinsam hat und von diese sechs Punkte jeweils zwei als Berührpunkt zusammenfallen, besteht der Schnitt von $E$ mit den Kreisen genau aus den drei verschiedenen Punkten $P_{12}$, $P_{23}$ und $P_{13}$, und die Geraden $m_1$, $m_2$ und $m_3$ sind die Mittelsenkrechten des von den drei Berührpunkten gebildeten Dreiecks. Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich jedoch immer in einem einzigen Punkt. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $M_{12}$, $M_{23}$ und $M_{13}$ paarweise verschieden sind. Also tritt der oben genannte Fall ein, dass diese drei Punkte gleich sind und die drei Kreise auf einer Kugel liegen.

*Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Müller*

## Quellenverzeichnis

**(0)** Unbekannt