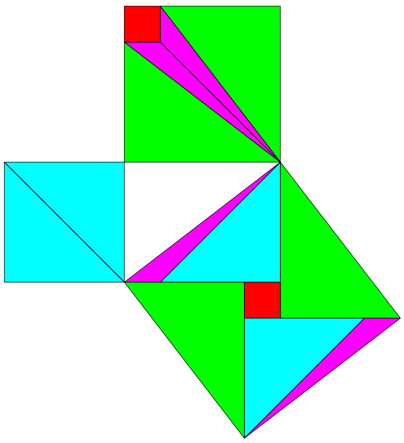
4. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Saison 1964/1965

Aufgaben und Lösungen



4. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 041011:

In einem Betrieb, in dem Elektromotoren montiert werden, können durch die Anschaffung einer neuen Fließbandanlage, deren Kosten 105 000 MDN betragen, die Lohnkosten je Motor um 0,50 MDN und die Gemeinkosten um jährlich 8 800 MDN gesenkt werden.

a) Wie viele Motoren müssen jährlich mindestens montiert werden, damit die Kosten der neuen Anlage bereits in drei Jahren durch die Einsparungen an Löhnen und Gemeinkosten gedeckt werden?

b) Wie viele Motoren müssen jährlich mindestens montiert werden, damit darüber hinaus noch ein zusätzlicher Gewinn von jährlich 10 000 MDN entsteht?

Aufgabe 041012:

In der Aufgabe

```
    V A T E R
+ M U T T E R
-------------
  E L T E R N
```

sind für die Buchstaben Ziffern einzusetzen. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche, verschiedene Buchstaben sind durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

Geben Sie sämtliche Lösungen an, und weisen Sie nach, daß es keine weiteren geben kann!

Aufgabe 041013:

In den Eckpunkten eines Sehnenvierecks werden an den Umkreis die Tangenten gezeichnet.

a) Beweisen Sie, daß das so entstandene Tangentenviereck ein Drachenviereck ist, wenn das Sehnenviereck ein Trapez ist!

b) Gilt die Umkehrung dieser Aussage ebenfalls?

Aufgabe 041014:

Gegeben sei ein regelmäßiges Tetraeder (Kantenlänge 6 cm).

a) Stellen Sie das Tetraeder im dimetrischen Verfahren dar!

b) Beweisen Sie, daß die Gegenkanten (Kanten, die keinen Punkt gemeinsam haben) eines regelmäßigen Tetraeders orthogonal sind!

Aufgabe 041015:

Die Zahl $2^{3\,217} - 1$ wurde als Primzahl ermittelt.

a) Stellen Sie fest, wieviel Stellen diese Zahl hat!

b) Wie lautet die letzte Ziffer dieser Zahl?

Aufgabe 041016:

a) Berechnen Sie ohne Rechenhilfsmittel einen ganzzahligen Näherungswert für

$$x = \frac{\lg 5}{\lg 3 - \lg 2}!$$

b) Ist dieser Näherungswert kleiner oder größer als der exakte Wert?

4. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 041011:

a) Wenn pro Jahr x Motoren montiert werden, so werden pro Jahr $0,50 \cdot x + 8800$ MDN eingespart. Damit die Kosten der Anlage nach drei Jahren gedeckt sind, muss gelten $3 \cdot (0,5 \cdot x + 8800) = 105000 \Leftrightarrow x = 52400$.

b) Von den 105000 MDN müssen jährlich 35000 MDN eingespart werden, und ausserdem soll es noch 10000 MDN zusätzlichen Gewinn geben, deshalb gilt: $35000 + 10000 = 0,5 \cdot x + 8800 \Leftrightarrow x = 72400$. Dh. es müssen jährlich mindestens 72400 Motoren montiert werden.

Aufgeschrieben und gelöst von Adrian Hutter

Lösung 041012:

Es gelten folgende Gleichungen (Klammerausdrücke sind optional):
(1) $R + R = N(+10)$
(2) $E + E(+1) = R(+10)$
(3) $T + T(+1) = E(+10)$
(4) $A + T(+1) = T(+10)$
(5) $V + U(+1) = L + 10$
(6) $M + 1 = E$

Aus (1) und (2) folgt unmittelbar:
Wenn $R \leq 4$ dann kein Übertrag in (1) $\Rightarrow$ R gerade, und mit $R \neq 0$ (dies gilt, weil sonst in (1) $N = R$ wäre): $R = \{2, 4\} \Rightarrow E = \frac{R(+10)}{2} = \{1, 2, 6, 7\}$ (7a)
Wenn $R \geq 5$, dann mit Übertrag in (1) $\Rightarrow$ R ungerade: $R = \{5, 7, 9\} \Rightarrow E = \frac{R-1(+10)}{2} = \{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$, wobei $E = 9$ entfällt, da dies nur erreicht wird bei $R = 9$. (7b)
Also $R \in \{2, 4, 5, 7, 9\}$ und $E \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ (7c)

Betrachtet man zu den Werten aus (7a) und (7b) nun noch Gleichung (3), so ergibt sich analog:
Wenn $E \leq 4$ dann kein Übertrag in (2) $\Rightarrow$ E gerade mit $E(+10) = 2T$, und mit $E \neq 0$ (siehe (7c)): $E = \{2, 4\} \Rightarrow T = \frac{E(+10)}{2} = \{1, 2, 6, 7\}$ (8a)
Wenn $E > 5$ ($E \neq 5$, $E \neq 9$ siehe (7c)), dann mit Übertrag in (2) $\Rightarrow$ E ungerade: $E = \{7\} \Rightarrow T = \frac{E-1(+10)}{2} = \{3, 8\}$. (8b)
Also $E \in \{2, 4, 7\}$ und $T \in \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$ (8c)

Ich betrachte (7c) und (8c): Da R nur 2 werden kann bei $E = 1$ oder $E = 6 \Rightarrow R \neq 2$. Analog gilt $R \neq 7$, da hierfür $E = 3$ oder $E = 8$ gegeben sein muß. $\Rightarrow R \in \{4, 5, 9\}$ (9)

A ergibt sich mit (3), (4) und (8c) wie folgt: wenn $T < 4 \Rightarrow A = 0$ und wenn $T > 5 \Rightarrow A = 9$. (10)

Weiterhin gilt mit (6): $M \in \{1, 3, 6\}$ (11)

Es gilt also zusammenfassend:
$R = 4 \Rightarrow N = 8 \Rightarrow E = \{2, 7\} \Rightarrow M = \{1, 6\} \Rightarrow T = \{\{6\}\{3, 8\}\} \Rightarrow A = \{\{9\}\{0, 9\}\}$
$R = 5 \Rightarrow N = 0 \Rightarrow E = \{2, 7\} \Rightarrow M = \{1, 6\} \Rightarrow T = \{\{6\}\{3, 8\}\} \Rightarrow A = \{\{9\}\{0, 9\}\}$
$R = 9 \Rightarrow N = 8 \Rightarrow E = \{4\} \Rightarrow M = \{3\} \Rightarrow T = \{2, 7\} \Rightarrow A = \{0, 9\}$

Probiert man diese Fälle systematisch mit den verbleibenden freien Größen V, U, L durch, so kommt man auf folgende 8 Lösungen:
$VATER + MUTTER = ELTERN$
20374+693374=713748
59624+176624=236248
79624+156624=236248
90374+623374=713748
49625+186625=236250
89625+146625=236250
50249+362249=412498
60249+352246=412498

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 041013:

Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, bei dem keine Seite Durchmesser des Umkreises ist. Dann sind die Tangenten an den Umkreis von $ABCD$ in benachbarten Eckpunkten nicht parallel zueinander und haben daher einen Schnittpunkt. Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Tangenten in A und B mit E und entsprechend den der Tangenten in B und C mit F, in C und D mit G und den der in D und A mit H. E, F, G, H sind paarweise voneinander verschieden.

Aufgrund einer bekannten Eigenschaft von Tangentenabschnitten gelten dann die folgenden Beziehungen:

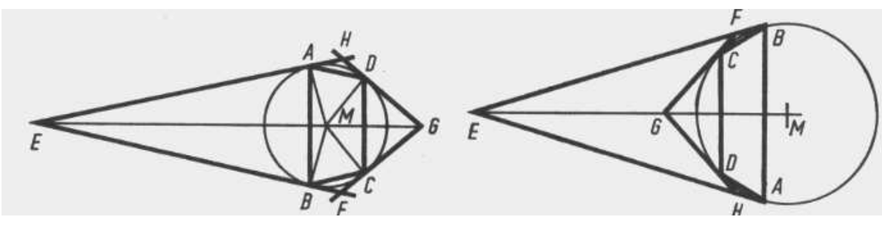
$$|AE| = |BE|, \quad |BF| = |CF|, \quad |CG| = |DG|, \quad |DH| = |AH|.$$

Ist M der Mittelpunkt des Umkreises des Sehnenvierecks $ABCD$, so gilt außerdem

$$|MA| = |MB| = |MC| = |MD|.$$

Daher ist jedes der Vierecke $AEBM$, $BFCM$, $CGDM$, $DHAM$ ein Drachenviereck. Infolgedessen halbieren ihre Diagonalen ME, MF, MG bzw. MH die Winkel $\sphericalangle AEB$, $\sphericalangle BFC$, $\sphericalangle CBD$ bzw. $\sphericalangle DMA$ und stehen auf den Strecken AB, BC, CD bzw. DA senkrecht.

a) Ist nun $ABCD$ Trapez, so kann o.B.d.A. angenommen werden, daß $AB \perp CD$ ist. In diesem Fall ist auch die auf AB senkrechte Strecke ME parallel zu der auf CD senkrechten Strecke MG. Folglich liegen ME und MG auf der Geraden g_{EG}, so daß die Diagonale EG von $EFGH$ die Winkel $\sphericalangle HEF$ und $\sphericalangle HGF$ halbiert. Daher ist nach dem Kongruenzsatz (sww) ΔEFG zu ΔEHG kongruent. Wegen $F \neq H$ liegen diese Dreiecke somit auf verschiedenen Seiten von g_{EG}, und zwar spiegelbildlich zu g_{EG}. Folglich ist $EFGH$ ein Drachenviereck.



b) Ja. Dazu ist zu zeigen: Ist $EFGH$ Drachenviereck, so ist $ABCD$ Trapez.

Beweis:
Wenn $EFGH$ Drachenviereck ist, so kann es o.B.d.A. zu g_{EG} symmetrisch angenommen werden, so daß g_{EG} jeden der beiden Winkel $\sphericalangle HEF$ und $\sphericalangle FGH$ halbiert. Wegen

$$\sphericalangle HEF = \sphericalangle AEB \quad \text{und} \quad \sphericalangle HGF = \sphericalangle DGC \tag{1}$$

halbiert g_{EG} auch die beiden Winkel auf der rechten Seite von (1). Da g_{ME} den Winkel $\sphericalangle AEB$ und g_{MA} den Winkel $\sphericalangle DGC$ halbiert ist $g_{ME} = g_{EG} = g_{MG}$. Außerdem steht g_{ME} auf AB und g_{MG} auf DC senkrecht. Daher steht sowohl AB als auch DC auf g_{EC} senkrecht, so daß $AB \perp CD$ gilt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 041014:

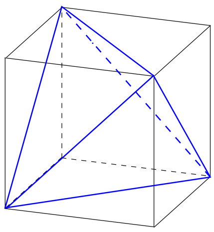


Abb. 041014

a) Ein regelmäßiges Tetraeder kann man erhalten, wenn man die Flächendiagonalen eines Würfels wie in Abb. 041014 miteinander verbindet. Jede Kante des Tetraeders hat dann dieselbe Länge.

Dies kann man sich für die dimetrische Darstellung des Tetraeders zu Nutze machen, indem man in gewohnter Weise einen Würfel darstellt (Winkel zur Horizontalen 7° und 42°, Verkürzungsfaktor 0,5 auf der X-Achse) und die Flächendiagonalen geeignet zum Tetraeder verbindet.

b) Projiziert man die gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders so aufeinander, daß sie sich schneiden, so liegen sie in derselben Ebene, da sich gegenüberliegende Kanten in gegenüberliegenden Würfelseiten befinden und diese einander bei Parallelprojektion genau dann schneiden, wenn sie aufeinander zu liegen kommen.

Demzufolge liegen die projizierten Tetraederkanten dann in derselben Ebene und sind die beiden Diagonalen einer Würfelfläche. Nun ist aus dem Schulunterricht bekannt, daß die Diagonalen eines Quadrates (jede Würfelfläche ist ein Quadrat) einander im rechten Winkel schneiden.

Damit ist gezeigt, daß die gegenüberliegenden Tetraederkanten orthogonal zueinander sind, wenn es sich um ein regelmäßiges Tetraeder handelt.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 041015:
Sei $\lg x$ der Logarihmus von x zur Basis 10, $[x]$ die Gauß-Klammer, welche die größte ganze Zahl $\leq x$ liefert, und $y \mod x$ $(x, y \in \mathbb{Z})$ der ganzzahlige Rest, der bei der Division von y durch x auftritt.

(a) Umschreiben der Zahl 2^{3217} auf die Basis 10 ergibt:

$$2^{3217} = 10^{\lg(2^{3217})} = 10^{3217 \cdot \lg 2}$$

Da 10^n im Dezimalsystem jeweils die kleinste $(n+1)$-stellige Zahl ist, folgt für eine positive reelle Zahl r, dass die Anzahl der Stellen von 10^r gleich $[r] + 1$ ist.

Die Anzahl der Stellen von 2^{3217} ist also gleich

$$[3217 \cdot \lg 2] + 1 = 969.$$

Da 2^{3217} nicht den Faktor 5 enthält, kann 2^{3217} nicht von der Form 10^n sein. Insbesondere ist 2^{3217} damit nicht die kleinste 969-stellige Zahl und dem zu Folge hat $2^{3217}-1$ ebenfalls 969 Dezimalstellen.

(b) Es genügt die Betrachtung der letzten Ziffer, also alle Berechnungen modulo 10 auszuführen. Es gilt:

$$\begin{aligned} 2^1 &\mod 10 = 2 \\ 2^2 &\mod 10 = 4 \\ 2^3 &\mod 10 = 8 \\ 2^4 &\mod 10 = 6 \\ 2^5 &\mod 10 = 2 \end{aligned}$$

Man hat es also mit einem 4-er Zyklus zu tun. Sei $n \in \mathbb{N}$ und 2^n gegeben. Gilt $n \mod 4 = 1$ endet 2^n auf 2, bei $n \mod 4 = 2$ auf 4, bei $n \mod 4 = 3$ auf 8 und bei $n \mod 4 = 0$ auf 6. Weitere Möglichkeiten gibt es nicht. Wegen $3217 \mod 4 = 1$ endet 2^{3217} auf 2 und $2^{3217}-1$ demzufolge auf 1.

Die Information, dass $2^{3217}-1$ eine Primzahl ist, wurde für die Lösung der Aufgabe nicht benötigt.

Aufgeschrieben und gelöst von Daniel Gutekunst

Lösung 041016:

Verwendete Formeln (bekannt aus dem Schulunterricht):

$$\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v \tag{1}$$

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c} \tag{2}$$

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \tag{3}$$

Nach (1) gilt

$$\begin{aligned} \lg 3 - \lg 2 &= \lg \frac{3}{2} \\ \Rightarrow x &= \frac{\lg 5}{\lg \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Nach (2) und (3) gilt:

$$x = \log_{\frac{3}{2}} 5 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 5$$

Durch Ausprobieren ganzzahliger Werte für x erhält man:

$\left(\frac{3}{2}\right)^1 = 1,5$

$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25$

$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = 3,375$

$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = 5,0625$

$\left(\frac{3}{2}\right)^5 = 7,59375$

Es ist folglich 4 die beste ganzzahlige Näherung für x, weil sie am nächsten an die Lösung der Gleichung (= 5) kommt. Da $\left(\frac{3}{2}\right)^4 > 5$ ist folglich der Näherungswert $x = 4$ größer als die tatsächliche Lösung.

Aufgeschrieben und gelöst von Annika Heckel

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag