4. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Saison 1964/1965

Aufgaben und Lösungen

4. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 040911:

Martina stellt ihrer Freundin in einem Jahr, das kein Schaltjahr ist, folgende Aufgabe:

"Wenn man zur Hälfte der Zahl der bis heute verflossenen Tage dieses Jahres ein Drittel der Zahl der restlichen Tage des Jahres addiert, erhält man die Zahl der verflossenen Tage. Den heutigen Tag habe ich zu den verflossenen gezählt."

Geben Sie das Datum (Tag und Monat) an, an dem das geschieht!

Aufgabe 040912:

Beim Schulsportfest hatten sich Christian (C), Bernd (B), Alfred (A) und Dieter (D) für den Endlauf über 100 m qualifiziert. Auf Grund der Vorlaufzeiten rechnete man mit einem Einlauf ins Ziel in der Reihenfolge CBAD. Damit hatte man aber weder den Platz eines Läufers noch ein Paar direkt aufeinanderfolgender Läufer richtig vermutet. Der Sportlehrer erwartete die Reihenfolge ADBC. Das war gut geschätzt; denn es kamen zwei Läufer auf den erwarteten Plätzen ein.

In welcher Reihenfolge gingen die Läufer ins Ziel?

Aufgabe 040913:

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Hypotenuse $\overline{AB}$ 25 mm und dessen Kathete $\overline{BC}$ 20 mm lang ist. Auf dieser Kathete wird die Strecke $\overline{BD}$ von der Länge 15 mm abgetragen, und vom Punkt D aus wird das Lot $\overline{DE}$ auf die Hypotenuse gefällt.

Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks BDE!

Aufgabe 040914:

Von den natürlichen Zahlen p und q ist bekannt, daß $0 < p < q$ gilt.

a) Ordnen Sie die Zahlen 1, $\frac{p}{q}$ und $\frac{q}{p}$ der Größe nach! Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl!

b) Stellen Sie fest, welche der beiden Zahlen $\frac{p}{q}$ und $\frac{q}{p}$ näher an 1 liegt!

Aufgabe 040915:

In den Eckpunkten eines Sehnenvierecks werden an den Umkreis die Tangenten gezeichnet.

a) Beweisen Sie, daß das so entstandene Tangentenviereck ein Rhombus ist, wenn das Sehnenviereck ein Rechteck ist!

b) Gilt die Umkehrung dieser Aussage ebenfalls?

Aufgabe 040916:

Setzt man vor eine beliebige dreistellige Zahl ihr Doppeltes, so entsteht eine sechs- oder siebenstellige Zahl, die durch 23 und 29 teilbar ist.

Ist diese Aussage richtig?

4. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 040911:

Es seien

x ... verflossene Tage
y ... übrige Tage

Nun kann man folgende Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} x+y &= 365 \quad \text{(so viele Tage hat ein normales Jahr)} \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y &= x \quad \text{(gegeben)} \qquad \left| -\frac{1}{2}x \right. \\ \frac{y}{3} &= \frac{x}{2} \\ y &= 1,5x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\cdot 1,5x &= 365 \quad \text{(siehe oben)} \\ 2,5x &= 365 \qquad |:2,5 \\ x &= 146 \end{aligned}$$

Es ist der 146. Tag des Jahres, also der 26. Mai.

Aufgeschrieben und gelöst von Christoph Schaller

Lösung 040912:

Es gibt 6 Fälle zu untersuchen, wenn man die Erwartung des Sportlehrers zugrunde legt, da 2 Plätze stimmen. Die restlichen beiden Plätze entstehen nämlich, indem man die Erwartung des Sportlehrers dieser beiden Plätze vertauscht.

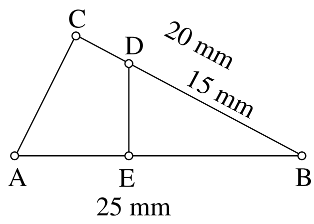
Fallunterscheidung:

1. ADCB - entfällt, da laut allgemeiner Erwartung die Reihenfolge AD nicht vorkommen kann.
2. ACBD - entfällt, da D dann in der 1. Schätzung richtig wäre.
3. ABDC - entfällt, da B dann in der 1. Schätzung richtig wäre.
4. CDBA - entfällt, da C dann in der 1. Schätzung richtig wäre.
5. BDAC - entfällt, da A dann in der 1. Schätzung richtig wäre.
6. DABC - einzige Lösung.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 040913:

Es gilt $u = \overline{EB} + \overline{BD} + \overline{DE}$ mit $\overline{BD} = 15$.



Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DBE$ sind einander ähnlich mit 2 gleichen Winkeln:

$\measuredangle ABC = \measuredangle DBE$ sowie
$\measuredangle ACB = \measuredangle DEB = 90°$.

Damit gilt nun:

$$\overline{EB} = \overline{BC} \cdot \overline{BD} : \overline{AB} = 20 \cdot 15 : 25 = 12$$

sowie nach dem Satz des Pythagoras

$$\overline{DE} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{EB}^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9.$$

Dadurch ergibt sich in obiger Gleichung: $u = 12 + 15 + 9 = 36$. Der Umfang des Dreiecks ΔBDE beträgt also 36 mm

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 040914:

a) Da $\frac{p}{q}$ der Reziproke von $\frac{q}{p}$ ist, ist eine der Zahlen kleiner, und eine größer als 1. Der Abstand von eins ist für $\frac{p}{q}$ gleich $1 - \frac{p}{q} = \frac{q-p}{q}$ und für $\frac{q}{p}$ gleich $1 - \frac{q}{p} = \frac{p-q}{p}$. Da $p < q$ gilt, ist $\frac{p-q}{p}$ negativ und $\frac{p}{q}$ ist größer als Eins.

$$\Rightarrow \frac{p}{q} < 1 < \frac{q}{p}$$

b) Es gilt $p < q$ und mithin $0 < q - p$, folglich gilt dies auch für das Quadrat, da beide Seiten der Ungleichung größer oder gleich Null sind: $0 < (p - q)^2$. Ferner kann man umformen:

$$\begin{aligned} 0 &< p^2 + q^2 - 2pq \\ pq - p^2 &< q^2 - pq \\ 1 - \frac{p}{q} &< \frac{q}{p} - 1 \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß der Abstand von $\frac{p}{q}$ zu Eins kleiner als der Abstand von $\frac{q}{p}$ zu Eins ist.

Aufgeschrieben und gelöst von Philipp Weiß

Lösung 040915:

a) Die Diagonalen des Rechtecks sind Durchmesser des Kreises und müssen sich somit im Mittelpunkt M des Kreises schneiden (Umkehrung des Satzes von Thales).

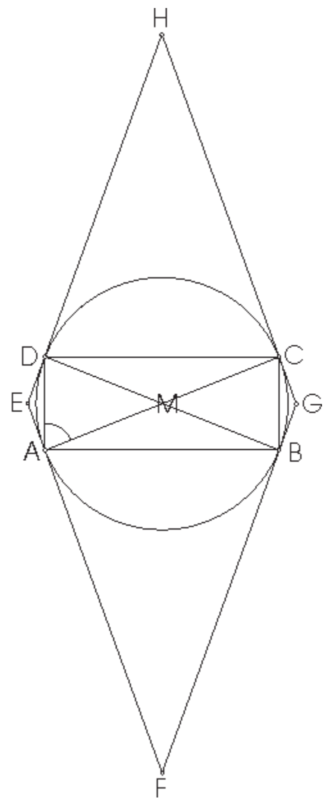
Die Dreiecke AMD und MBC sind gleichschenklig und kongruent (SSS: AD=BC, weil gegenüberliegende Seiten im Rechteck gleich groß sind und $AM = MD = BM = MC$, weil sich die Diagonalen (gleich lang) im Rechteck halbieren). Daraus folgt, dass die Winkel MAD, ADM, CBM und MCB gleich groß sind (Größe sei mit α bezeichnet).

Daraus wiederum folgt, da die Tangente jeweils senkrecht zu der Strecke zu M ist, dass die Winkel DAE, EDA, GBC und BCG $90°$ - α betragen und somit gleich groß sind. Also sind die Dreiecke EAD und BGC gleichschenklig und kongruent (WSW). Daraus folgt, dass $DE = EA = BG = GC$ ist.

Wenn man analog die Dreiecke ABM und DMC bzw. AFB und DCH betrachtet, folgt, dass $HD = AF = FB = CH$ ist.

Beide Gleichungen addiert ergibt: $DE + HD = EA + AF = BG + FB = GC + CH$ und somit: $HE = EF = FG = GH$.

Damit sind also die Seiten des Tangentenvierecks gleich lang - es ist also ein Rhombus.



b) Da in einem Rhombus, die gegenüberliegenden Winkel gleich groß sind, gilt, dass die Winkel AED und CGB gleich groß sind.

Betrachtet man nun die Vierecke $AMDE$ und $BGCM$, so fällt auf, dass sie kongruent zueinander sind (Drei Winkel gemeinsam: zwei rechte Winkel und $AED = CGB$).

Somit sind also jeweils die vierten Winkel der Vierecke gleich groß, was bedeutet, daß sie gleichzeitig Scheitelwinkel sind und somit die Strecken AC und BD keine Dreiecke und gleichzeitig die Durchmesser des Kreises sind.

Durch den Satz des THALES folgt, dass die Winkel des Vierecks $ABCD$ alle rechtwinklig sind und es somit ein Rechteck ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Kristin Steinberg

Lösung 040916:
Wenn die Ausgangszahl mit a bezeichnet wird, ist die entstehende Zahl gleich

$$a \cdot 2 \cdot 1000 + a = 2001 \cdot a = 69 \cdot 29 \cdot a = 23 \cdot 87 \cdot a$$

Damit ist $2001 \cdot a$ durch 23 und 29 teilbar.

Da das Doppelte einer 3-stelligen Zahl 3- oder 4-stellig ist, ist die entstehende Zahl 6- oder 7-stellig und die Aussage ist richtig.

Aufgeschrieben und gelöst von Philipp Weiß

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag