4. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Saison 1964/1965

Aufgaben und Lösungen

4. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 040811:

Für ein Experiment werden $50\,\text{cm}^3$ 10-prozentige Salzsäure benötigt. Es steht aber nur 36-prozentige Salzsäure zur Verfügung.

Wieviel Kubikzentimeter 36-prozentige Salzsäure müssen mit destilliertem Wasser verdünnt werden?

Aufgabe 040812:

Es ist zu beweisen, daß die Höhen in einem Rhombus gleichlang sind!

Aufgabe 040813:

Auf einer zweigleisigen Strecke zum Vorort einer Großstadt fährt alle 10 Minuten von der Anfangsstation und von der Endstation gleichzeitig je eine Straßenbahn ab und benötigt je 50 Minuten Fahrtzeit. Die Aufenthaltszeit an diesen beiden Stationen beträgt je 10 Minuten.

Wieviel Straßenbahnen sind insgesamt auf dieser Strecke eingesetzt?

Aufgabe 040814:

Die Zahl 62**427 ist durch 99 teilbar.

Bestimme die fehlenden Ziffern, und gib an, wie du sie gefunden hast! Wieviel Lösungen gibt es?

Aufgabe 040815:

Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Wenn in einem Dreieck eine Seitenhalbierende halb so lang wie die zugehörige Seite ist, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Aufgabe 040816:

Ein Würfel soll auf verschiedene Arten durch einen ebenen Schnitt in zwei Teilkörper zerlegt werden. Können dabei folgende Schnittfiguren entstehen:

a) gleichseitiges Dreieck

b) gleichschenkliges Dreieck (nicht gleichseitig)

c) rechtwinkliges Dreieck

d) ungleichschenkliges Dreieck

e) Quadrat

f) Rechteck (nicht quadratisch)

g) Fünfeck

h) Achteck?

Welche möglichen Schnittfiguren sind in der Aufzählung nicht enthalten?

Fertige zu jeder Schnittfigur eine Skizze an, aus der man sehen kann, wie der ebene Schnitt geführt werden muß, wenn man die betreffende Schnittfigur erhalten will!

4. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 040811:
x sei die gesuchte Menge an 36%-iger Salzsäure

50cm^3 an 10%-iger Salzsäure enthalten 5cm^3 reiner Salzsäure (S). Somit lässt sich folgende Gleichung aufstellen:

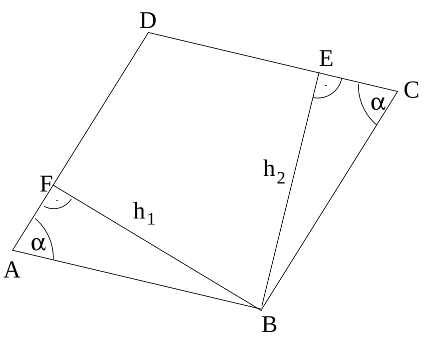
$$S = \frac{36}{100} \cdot x$$
$$x = S \cdot \frac{100}{36}$$
$$x = \frac{5\text{cm}^3 \cdot 100}{36}$$
$$x = 13\frac{8}{9}\text{cm}^3 \sim 13,9\text{cm}^3.$$

Man benötigt also $\sim 13,9$cm^3 36%-iger Salzsäure und dementsprechend $50-13,9$cm^3 $\sim 36,1$cm^3 destilliertes Wasser.

Aufgeschrieben und gelöst von Daniel Kirchner

Lösung 040812:
Die Dreiecke ABF und BCE sind kongruent nach WSW:

$\sphericalangle BAF \simeq \sphericalangle BCE$ (gegenüberliegende Winkel im Rhombus)
$\overline{AB} \simeq \overline{BC}$ (Seiten im Rhombus)
$\sphericalangle ABF \simeq \sphericalangle CBE$ (da bereits ein gleicher Winkel und ein rechter Winkel in den Dreiecken vorhanden ist, muß auch der dritte Winkel übereinstimmen)



Damit sind auch die restlichen Stücke in den beiden Dreiecken kongruent, insbesondere $h_1 \simeq h_2$ $\square$

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 040813:
Zur Abfahrtszeit befinden sich an der Anfangs- und an der Endstation je 2 Bahnen. Außerdem sind je 2 Bahnen 10 min, 20 min, 30 min und 40 min unterwegs. Also sind insgesamt 12 Straßenbahnen eingesetzt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 040814:
Die Quersumme der bis jetzt vorhandenen Ziffern der Zahl $62 * *427$ beträgt 21. Da sie durch 9 teilbar ist, muss ihre Quersumme ebenfalls durch 9 teilbar sein, somit kommen folgende Quersummen in Frage: 27 und 36.

Folgende Zahlen ergeben eine dieser Quersummen:

6 215 427
6 251 427
6 224 427
6 242 427
6 233 427
6 269 427
6 296 427
6 278 427
6 287 427

Nun muss überprüft werden, welche dieser Zahlen zusätzlich durch die Zahl 11 teilbar sind. Somit erhält man genau eine Zahl die durch 99 teilbar ist, und zwar: 6 224 427.

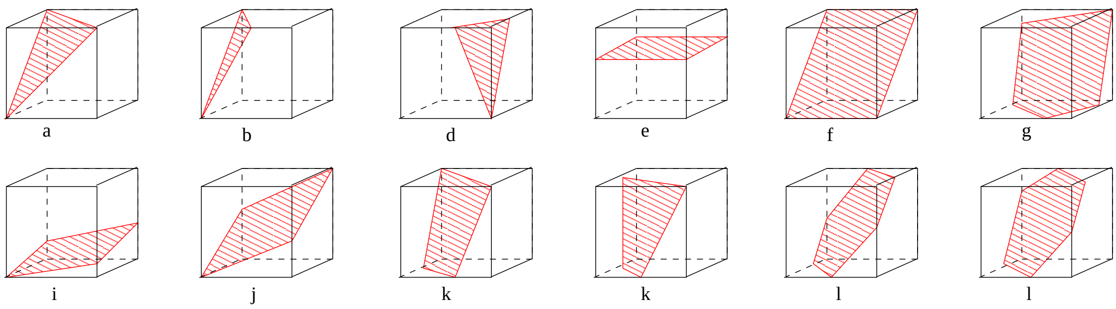
Hinweis: Bei der Teilbarkeit durch 11 kann bspw. die Regel, daß die Zahl durch 11 teilbar ist, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist, genutzt werden.

Aufgeschrieben und gelöst von Daniel Kirchner

Lösung 040815:
Nach den Voraussetzungen des Satzes liegen die Eckpunkte des Dreiecks auf dem Thaleskreis über $\overline{AB}$, falls a_c die Seitenhalbierende ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 040816:
Von den angegebenen Schnittfiguren sind folgende möglich (siehe Abbildung):



a, b und d nur für spitzwinklige Dreiecke; e, f, g (unregelmäßig mit 2 Paaren paralleler Seiten). Nicht möglich sind dagegen: c) und h).

In der Aufzählung fehlen:

i) Parallelogramm, die weder Rhombus- noch Rechteckform haben,

j) Rhombus,

k) Trapeze (gleichschenklig und ungleichschenklig)

l) Sechsecke (regelmäßige und solche mit 3 Paaren paralleler Seiten).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Quellenverzeichnis

(15) "a+b = b+a" - Heft 66, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 8 - Dokumentation I.-XVIII. Olympiade (1961-1979), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1979.