4. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1964/1965

Aufgaben und Lösungen

4. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 040711:

Nur unter Verwendung der Ziffer 7 sollen Zahlen gebildet werden, die miteinander verknüpft die Zahl 1964 ergeben. Folgende Arten der Verknüpfung dürfen dabei auftreten: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Brüche mit gleichem Zähler und Nenner sind nicht zu verwenden.

Gib eine der möglichen Lösungen an!

Aufgabe 040712:

Ein Güterzug legte in der ersten Stunde $35\frac{3}{4}$ km und in den nachfolgenden $2\frac{1}{2}$ Stunden weitere $92,7$ km zurück. Für die Rückfahrt auf derselben Strecke benötigte er drei Stunden und 12 Minuten.

Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit für die ganze Fahrt! Runde auf eine Dezimale!

Aufgabe 040713:

Bei geometrischen Übungen im Freien hat Brigitte die Aufgabe, einen im Gelände gegebenen Winkel von 80° auf ein anderes Geländestück zu übertragen. Als Hilfsmittel stehen ihr einige Fluchtstäbe und eine 20 m lange Schnur zur Verfügung. Brigitte findet zwei Lösungswege.

Aufgabe 040714:

Jede natürliche Zahl heißt *vollkommene Zahl*, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist. Die Zahl 12 hat zum Beispiel die echten Teiler 1, 2, 3, 4, 6 und ist - wie man sieht - keine vollkommene Zahl.

Welche *vollkommenen Zahlen* gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 30?

Aufgabe 040715:

In einem Quadrat $ABCD$ sind M und N die Mitten der Seiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$. Es ist zu beweisen, daß die Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{BN}$ aufeinander senkrecht stehen.

Aufgabe 040716:

Gegeben ist ein quaderförmiger Holzklotz mit den Kanten von der Länge $a = 8$ cm, $b = 8$ cm und $c = 27$ cm. Durch möglichst wenig ebene Schnitte mit einer Säge sind Teilkörper herzustellen, so daß sich diese zu einem Würfel zusammensetzen lassen.

Fertige eine Skizze des Quaders an, aus der der Verlauf der Schnitte ersichtlich ist, und eine Skizze des Würfels, die die Lage der Teilkörper zeigt!

4. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 040711:

z.B.: $(777 + 777 + 777) : 7 + 77 + 777 + 777 = 1964$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 040712:

Der Gesamtweg beträgt: $(35\frac{3}{4} + 92,7)\,\text{km} \cdot 2 = 256,9\,\text{km}$

Die gesamte Fahrtzeit beträgt: $(1 + 2,5 + 3,2)\,\text{h} = 6,7\,\text{h}$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{256,9}{6,7} \cdot \frac{\text{km}}{\text{h}} = 38,3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt rund $38,3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 040713:

a) Man verknüpft die Seilenden miteinander, legt diesen Knoten auf den Scheitelpunkt des vorgegebenen Winkels und spannt mit dem Seil mit Hilfe der Fluchtstäbe ein Dreieck auf, so daß zwei seiner Seiten auf den Schenkeln des Winkels liegen. Die beiden restlichen Eckpunkte des Dreiecks werden durch Knoten markiert.

   An der gewünschten Stelle läßt sich dann mit drei Fluchtstäben und dem Seil ein kongruentes Dreieck aufspannen und damit der Winkel übertragen.

b) Man schlägt mit einem Teil des Seiles (etwa der Hälfte, da der Winkel größer als 60° ist) um den Scheitelpunkt des vorgegebenen Winkels einen Kreisbogen, der die Schenkel des Winkels in zwei Punkten schneidet, und überträgt einen Kreisbogen, der einen gleichgroßen Radius hat, an die gewünschte Stelle.

   Dann markiert man auf dem Seil die Länge der zwischen den Schenkeln des Winkels liegenden Sehne und überträgt diese analog der bekannten geometrischen Grundkonstruktionen ebenfalls an die gewünschte Stelle.

Anmerkung: In beiden Fällen wird also ein Dreieck aus drei Seiten konstruiert.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

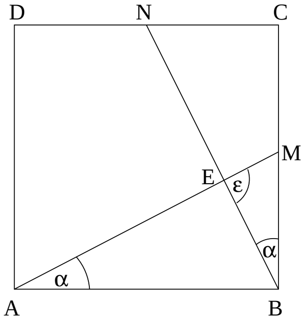
Lösung 040714:

Man schreibt die echten Teiler der natürlichen Zahlen von 2 bis 30 für jede dieser Zahlen auf und bildet jeweils die Summe. Dabei findet man

$$6 = 1 + 2 + 3 \qquad \text{und}$$
$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 040715:

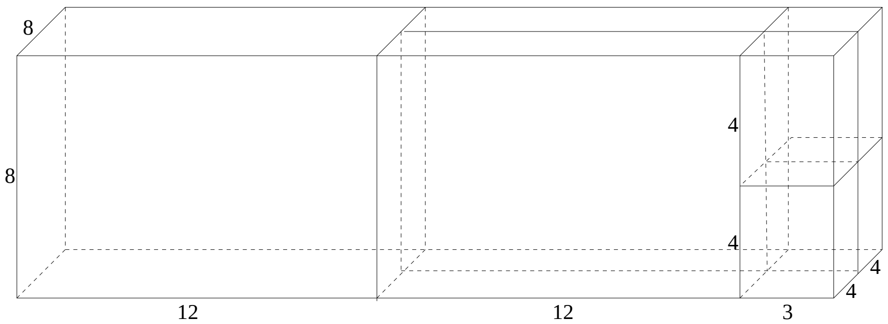


Die Dreiecke ABM und BNC sind kongruent (SWS). Daraus folgt:

$$\epsilon = 180° - \alpha - (90° - \alpha)$$
$$\epsilon = 90°$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 040716:

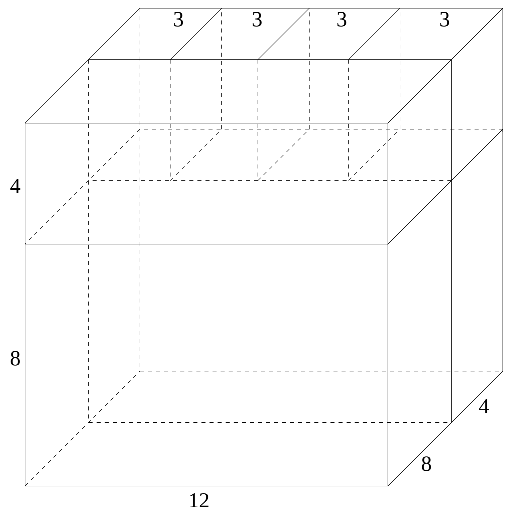


Der Quader hat ein Volumen von

$$V = 8 \cdot 8 \cdot 27\,\text{cm}^3 = 1728\,\text{cm}^3.$$

Damit muß der Würfel bei gleichem Volumen eine Kantenlänge von 12 cm haben, da gilt:

$$1728\,\text{cm}^3 = (12\,\text{cm})^3.$$



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.