3. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1963/1964

Aufgaben und Lösungen

3. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 031241:

Beweisen Sie, daß für alle positiven ganzrationalen Zahlen a und b stets

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt[a+b]{a^b \cdot b^a}$$

ist! Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Aufgabe 031242:

Man bestimme alle reellen Werte x, die die folgende Gleichung befriedigen:

$$\frac{\sin 3x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) + 1}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - 7x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + m} = 0.$$

Dabei ist m eine gegebene reelle Zahl.

Aufgabe 031243:

Gegeben sein ein (nicht notwendig regelmäßiges) Tetraeder, dessen Seitenflächen sämtlich flächengleich sind.

Beweisen Sie, daß dann folgende Punkte zusammenfallen:

a) der Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel, das heißt der alle vier Seitenflächen innerlich berührenden Kugel,

b) der Mittelpunkt der Umkugel, das heißt der durch die vier Eckpunkte gehenden Kugel!

Aufgabe 031244:

Es bezeichne a_n die letzte Ziffer der Zahl $n^{(n^n)}$ (n sei eine natürliche Zahl $\neq 0$).

Beweisen Sie, daß die Zahlen a_n eine periodische Folge bilden und geben Sie diese Periode an!

Aufgabe 031245:

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\beta = 45°$. Auf der Seite $\overline{BC}$ liege ein Punkt P, wobei $\overline{BP} : \overline{PC} = 1 : 2$ (innere Teilung) und $\sphericalangle APC = 60°$ sind.

Jemand behauptet, man könne allein mit elementaren geometrischen Sätzen ohne Benutzung der ebenen Trigonometrie die Größe des Winkels γ ermitteln.

Aufgabe 031246:

Welche der folgenden vier Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

a) Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig.

b) Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig.

c) Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig.

d) Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig.

3. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 031241:

Beweis: Schreiben wir die rechte Seite der gegebenen Ungleichung um, erhalten wir den Ausdruck

$$a^{b/(a+b)} \cdot b^{a/(a+b)},$$

der uns sofort an die *gewichtete AM-GM-Ungleichung* erinnern sollte: Sind $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen und $\delta_1, \ldots, \delta_n$ ebenfalls positive reelle Zahlen (Gewichte) mit $\delta_1 + \cdots + \delta_n = 1$, so gilt stets

$$\delta_1 a_1 + \cdots + \delta_n a_n \geq a_1^{\delta_1} \cdots a_n^{\delta_n},$$

wobei Gleichheit genau dann vorliegt, wenn alle a_i untereinander gleich sind.

Diese bekannte Ungleichung für $n = 2$, $\delta_1 = \frac{b}{a+b}$ und $\delta_2 = \frac{a}{a+b}$ hingeschrieben, führt auf

$$\frac{2ab}{a+b} \geq a^{b/(a+b)} \cdot b^{a/(a+b)} = \sqrt[a+b]{a^b \cdot b^a}. \tag{1}$$

$$\text{Aus} \quad (a-b)^2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a+b)^2 \geq 4ab \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

folgt mit (1) die Behauptung. □

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 031242:

Ein Bruch ist genau dann null, wenn sein Zähler gleich null ist und der Nenner verschieden von null ist.

$$\sin 3x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) + 1 = 0 \qquad \sin 3x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = -1$$

Da der Betrag der Werte von Sinus und Cosinus immer kleiner oder gleich 1 ist, müssen für eine Lösung beide einen Wert vom Betrag 1 annehmen:

$$\sin 3x = 1 \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = -1 \qquad \text{oder} \qquad \sin 3x = -1 \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = 1$$

Wann nehmen Sinus und Cosinus Werte mit Betrag 1 an?

$$\sin y = 1 \Leftrightarrow y \in \left\{2\pi k + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{N}\right\}$$
$$\sin y = -1 \Leftrightarrow y \in \left\{2\pi k - \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{N}\right\}$$
$$\cos z = 1 \Leftrightarrow z \in \{2\pi j : j \in \mathbb{N}\}$$
$$\cos z = -1 \Leftrightarrow z \in \{2\pi j + \pi : j \in \mathbb{N}\}$$

Das bedeutet für $y = 3x$ bzw. $z = \frac{\pi}{3} - 4x$

$$\begin{aligned}
\sin 3x = 1 &\Leftrightarrow 3x \in \left\{\frac{\pi}{2}(4k+1) : k \in \mathbb{N}\right\} \\
&\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6}(4k+1) : k \in \mathbb{N}\right\} \\
\sin 3x = -1 &\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6}(4k-1) : k \in \mathbb{N}\right\} \\
\cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = 1 &\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - 4x \in \{2\pi j : j \in \mathbb{N}\} \\
&\Leftrightarrow 4x \in \left\{\frac{\pi}{3} - 2\pi j : j \in \mathbb{N}\right\} \\
&\Leftrightarrow 4x \in \left\{\frac{\pi}{3}(1-6j) : j \in \mathbb{N}\right\} \\
&\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{12}(1-6j) : j \in \mathbb{N}\right\} \\
\cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = -1 &\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - 4x \in \{2\pi j + \pi : j \in \mathbb{N}\} \\
&\Leftrightarrow 4x \in \left\{\frac{\pi}{3} - 2\pi j - \pi : j \in \mathbb{N}\right\} \\
&\Leftrightarrow 4x \in \left\{\frac{\pi}{3}(-2-6j) : j \in \mathbb{N}\right\} \\
&\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{12}(-2-6j) : j \in \mathbb{N}\right\}
\end{aligned}$$

Gesucht sind also Paare (k, j) ganzer Zahlen mit folgenden Bedingungen:

1. Fall: $\sin y = -1 \wedge \cos z = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{6}(4k-1) &= \frac{\pi}{12}(1-6j) \\
8k - 2 &= 1 - 6j \\
8k + 6j &= 3 \\
2(4k+3j) &= 3
\end{aligned}$$

Das führt offensichtlich nicht zu einer Lösung, denn die linke Seite der Gleichung ist stets durch 2 teilbar, die rechte Seite hingegen nie.

2. Fall: $\sin y = 1 \wedge \cos z = -1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{6}(4k+1) &= \frac{\pi}{12}(-2-6j) \\
8k + 2 &= -2 - 6j \\
8k + 6j &= -4 \\
4k + 3j &= -2
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für $(k, j) = (1, -2)$ erfüllt und ansonsten nur, wenn man zu dem Term $4k$ ein Vielfaches von $\text{kgV}(4, 3) = 12$ addiert und denselben Wert von $3j$ abzieht.

$$(k, j) \in \{(1 + 3l, -2 - 4l) : l \in \mathbb{Z}\}$$

Aus den oben gefundenen Werten für k ergeben sich folgende Werte für x:

$$x \in \left\{\frac{\pi}{6}(4k+1) : k \in \{1 + 3l : l \in \mathbb{Z}\}\right\} = \left\{\frac{\pi}{6}(12l+5) : l \in \mathbb{Z}\right\}$$

Zuletzt muss noch sichergestellt werden, dass der Nenner des Bruches in der Aufgabenstellung verschieden von null ist, wenn der Zähler null wird.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - 7x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + m = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 7\frac{\pi}{6}(12l+5)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}(12l+5)\right) + m$$

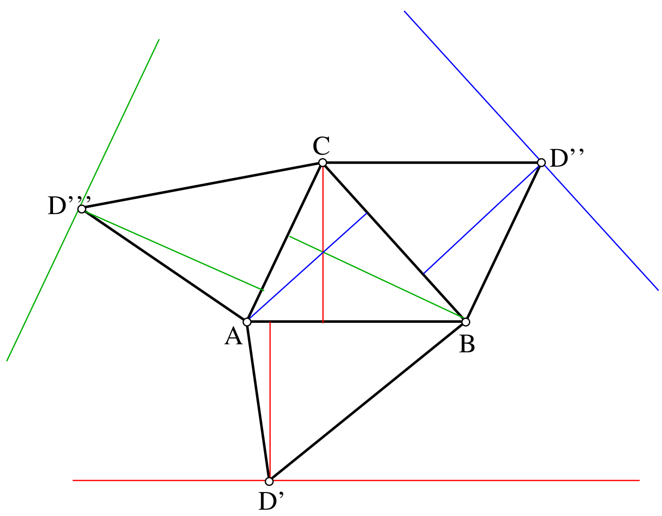
$$
\begin{aligned}
&= \sin\left(-7 \cdot 2\pi l - \frac{33\pi}{6}\right) - \cos\left(\pi \cdot (2l+1)\right) + m \\
&= \sin\left(-\frac{11\pi}{2}\right) - \cos\pi + m \\
&= \sin\frac{\pi}{2} - \cos\pi + m \\
&= 1 - (-1) + m \\
&= 2 + m
\end{aligned}
$$

Das bedeutet, dass der Nenner den Wert $2 + m$ besitzt, wann immer der Zähler null wird. Ist $m = -2$ wird der Bruch niemals null, ist dagegen $m \neq -2$ wird der Bruch genau dann null, wenn es ein ganzzahliges l gibt mit $x = \frac{\pi}{6}(12l + 5)$

Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann

Lösung 031243:

Was bedeutet es, wenn das Trapez flächengleiche Seiten hat? Zeichnen wir uns ein Teraedernetz wie im Bild dargestellt auf, dann kann man folgende Überlegungen anstellen:



Ich beginne mit einem beliebigen Dreieck ΔABC. Dann muß wegen der Flächengleichheit der jeweils fehlende Punkt (D', D'', D''') der äußeren Dreiecke auf je einer Linie liegen, die von der jeweiligen Kante von ΔABC denselben Abstand hat wie von dieser Kante zum dritten Punkt im ΔABC. Mit dieser Einschränkung haben die Dreiecke ΔABC und das betrachtete anliegende Dreieck eine gemeinsame Seite und die auf dieser Seite stehende Höhe von gleicher Länge. Mithin ist der Flächeninhalt gleich. Es ist also sogar jede Seite des Dreiecks zu jeder anderen Seite flächengleich.

Nun zeige ich mit der folgenden Begründung, daß es nur eine Lösung gibt, Dreiecke $\Delta ABD'$, $\Delta BCD''$, $\Delta CAD'''$ zu einem vorhandenen Dreieck ΔABC zu erzeugen:

(1) Wähle ich einen beliebigen Punkt auf einer dieser Parallelen (bspw. im Dreieck $\Delta ABD'$), dann liegt D' fest, damit auch AD' und BD'.

Für das Dreieck $\Delta BCD''$ ist damit D'' bestimmt, denn es muß $\overline{BD'} = \overline{BD''}$ gelten, sonst entsteht aus dem Netz kein Tetraeder.

Nun liegt auch CD'' fest und damit im Dreieck $\Delta ACD'''$, denn es muß gelten $\overline{CD''} = \overline{CD'''}$. Damit liegt auch AD''' fest, was wiederum genauso groß wie AD' aus dem Dreieck $\Delta ABD'$ sein muß.

(2) I.d.R. wird es nicht auf Anhieb klappen, daß in oben beschriebener Folge $\overline{AD'} = \overline{AD'''}$ gilt.

Wenn nun o.B.d.A. $AD' < AD'''$, dann verlängere ich $AD' \Rightarrow BD'$ wird kürzer $\Rightarrow BD''$ wird kürzer $\Rightarrow CD''$ wird länger $\Rightarrow CD'''$ wird länger $\Rightarrow AD'''$ wird kürzer. Auf diesem Weg kann man mit genügend kleinen Schritten $AD' = AD'''$ erzeugen - und zwar genau eine Lösung.

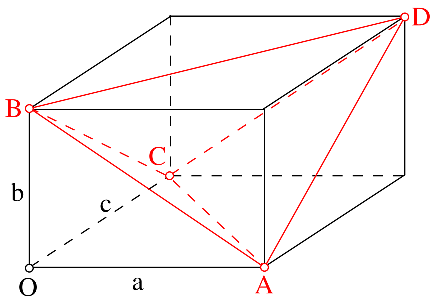
Jetzt zeige ich, daß dies genau dann gilt, wenn die Dreiecke $\Delta ABD'$, $\Delta BCD''$ und $\Delta ACD'''$ dadurch entstehen, daß das Dreieck ΔABC um einen Kantenmittelpunkt um 180° gedreht wird.

Dann sind die Dreiecke kongruent und es gilt:

$$\overline{AB} = \overline{CD''} = \overline{CD'''} \qquad \overline{BC} = \overline{AD'} = \overline{AD'''} \qquad \overline{AC} = \overline{BD'} = \overline{BD''}$$

Damit ist insbesondere gezeigt, daß die Seiten, die gleich lang sein müssen, dies auch tatsächlich sind. Es ergibt sich also tatsächlich das Netz eines Tetraeders.

Allgemein gilt, daß Tetraeder aus einem Parallelepiped entstehen, wenn jede 2. Ecke abgeschnitten wird. Für Tetraeder mit kongruenten Seiten gilt sogar, daß sie analog aus einem Quader entstehen.



Die Punkte A, B, C, D lassen sich wie im Bild angegeben in einem Quader mit den Kantenlängen a, b, c in Vektorschreibweise darstellen als:

$$A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Ein Punkt P, der der Diagonalenschnittpunkt des Quaders ist, hat offensichtlich zu allen Ecken den gleichen Abstand und ist daher der Umkugelmittelpunkt. P hat dabei die Koordinaten

$$P = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix}$$

Nun wird untersucht, wie groß der Abstand d_i von P zu den Tetraederseitenflächen ist. Dabei wird die Hessesche Normalform verwendet. Es entstehen folgende 4 Gleichungen:

$$d_1 = (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \frac{\left[(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})\right]}{|(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})|} = \frac{1}{|(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})|} \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{|(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})|} \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} bc \\ -ac \\ ab \end{pmatrix} = \frac{-abc - abc + abc}{2\sqrt{(bc)^2 + (-ac)^2 + (ab)^2}} = \frac{-abc}{2\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}}$$

$$d_2 = (\vec{p} - \vec{d}) \cdot \frac{\left[(\vec{b} - \vec{d}) \times (\vec{c} - \vec{d})\right]}{|(\vec{b} - \vec{d}) \times (\vec{c} - \vec{d})|} = \frac{1}{|(\vec{b} - \vec{d}) \times (\vec{c} - \vec{d})|} \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \\ -\frac{c}{2} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{|(\vec{b} - \vec{d}) \times (\vec{c} - \vec{d})|} \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \\ -\frac{c}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -bc \\ -ac \\ ab \end{pmatrix} = \frac{abc + abc - abc}{2\sqrt{(-bc)^2 + (-ac)^2 + (ab)^2}} = \frac{abc}{2\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}}$$

$$d_3 = (\vec{p} - \vec{b}) \cdot \frac{\left[(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{d} - \vec{b})\right]}{|(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{d} - \vec{b})|} = \frac{1}{|(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{d} - \vec{b})|} \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{|(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{d} - \vec{b})|} \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} = \frac{-abc - abc + abc}{2\sqrt{(-bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}} = \frac{-abc}{2\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}}$$

$$d_4 = (\vec{p} - \vec{c}) \cdot \frac{\left[(\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{d} - \vec{c})\right]}{|(\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{d} - \vec{c})|} = \frac{1}{|(\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{d} - \vec{c})|} \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ -\frac{c}{2} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{|(\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{d} - \vec{c})|} \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ -\frac{c}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} = \frac{abc + abc - abc}{2\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}} = \frac{-abc}{2\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}}$$

Damit sind bis auf das Vorzeichen alle Abstände identisch. Das Vorzeichen bestimmt nur die Richtung des Vektors, der den Abstand zwischen dem Punkt und der Ebene darstellt. Insofern sind alle Abstände von gleicher betragsmäßiger Länge und es ist gezeigt, daß die Inkugel des Tetraeders ihren Mittelpunkt in P, also in dem Umkugelmittelpunkt hat. □

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 031244:

Die Einerstelle einer natürlichen Zahlen im dekadischen Positionensystem entspricht dem Rest bei der Division durch 10. Die Einerstelle der Potenz n^k hängt nur von k und der Einerstelle von n ab. Wir stellen fest, dass die Folge der Einerstellen der Potenzen n^k für k als Laufvariable und festes n, also $\left(n^k \bmod 10 : k \in \mathbb{N}\right)$, eine Periode bildet, wobei die Länge der Periode von (der Einerstelle von) n abhängt. Die kleinste gemeinsame Periode (das kleinste gemeinsame Vielfache aller Einzelperioden) ist vier.

n	n^1 mod 10	n^2 mod 10	n^3 mod 10	n^4 mod 10
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	4	8	6
3	3	9	7	1
4	4	6	4	6
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	9	3	1
8	8	4	2	6
9	9	1	9	1

Da die kleinste gemeinsame Periode die Länge vier besitzt, hängt die Einerstelle der Potenz n^k nur von $n \bmod 10$ und $k \bmod 4$ ab. ($k = 0$ ist ausgeschlossen!) In der Aufgabenstellung ist $k = n^n$ gesetzt, daher ist die Periode der Folge $(n^n \bmod 4 : n \in \mathbb{N})$ zu untersuchen. Wir vermuten, dass der Ausdruck $a^b \bmod 4$ sowohl in a als auch in b ein Periode besitzt, für festgehaltenes b bzw. a. Der Ausdruck $a^b \bmod 4$ besitzt in a immer eine Periode der Länge 4, weil $a^b \bmod 4$ nur von $a \bmod 4$ und b abhängt (vergleiche mit Argument zur Einerstelle im Dezimalsystem). Mit Hilfe einer Wertetabelle ermittelt man für a^b bezüglich b eine Periode der Länge zwei.

a	a^1 mod 4	a^2 mod 4	a^3 mod 4
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	0	0
3	3	1	3

Die vollständige Wertetabelle für $a^b \bmod 4$ besteht abgesehen von der ersten Spalte aus identischen Blöcken der Größe 4×2 auf deren Diagonale man die Werte der Folge $(n^n \bmod 4 : n \in \mathbb{N})$ ablesen kann. Offensichtlich hat diese Folge die Periode vier.

$$(n^n \bmod 4 : n \in \mathbb{N}) = (1, 0, 3, 0, \dots)$$

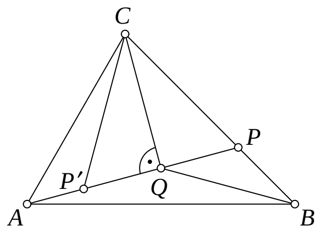
Die vollständige Wertetabelle für $a^b \bmod 10$ besteht, wie oben zu sehen, aus identischen Blöcken der Größe 10×4. Die Einerstelle von $n^{(n^n)}$ entspricht in der ($n \bmod 10$). Zeile der ersten Tabelle dem ($n^n \bmod 4$). Eintrag (($n^n \bmod 4$) gemäß zweiter Tabelle). Die gesuchte Folge hat die Periode $\mathrm{kgV}(10, 4) = 20$ und lautet:

$$(1, 6, 7, 6, 5, 6, 3, 6, 9, 0, 1, 6, 3, 6, 5, 6, 7, 6, 9, 0, \dots)$$

Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann

Lösung 031245:

Auf der Strecke AP sei Q der Punkt, welcher von P den gleichen Abstand hat, wie B von P. Dann ist das Dreieck QPB gleichschenklig und weil $\sphericalangle CPQ = 60°$ sein soll, ist der Nebenwinkel $\sphericalangle QPB = 120°$ und die Basiswinkel des Dreiecks QPB sind $30°$ groß.



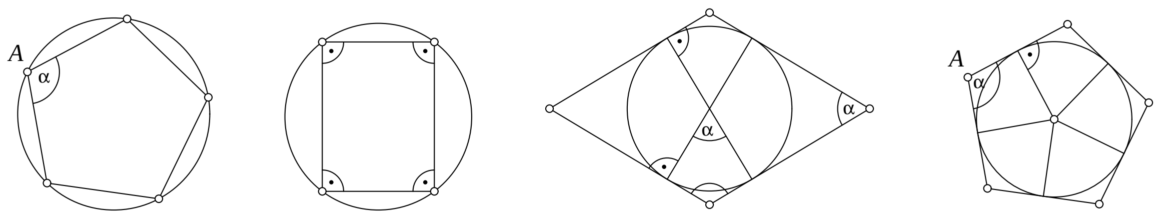
Die Größe des Winkels $\sphericalangle PBA$ wird als $45°$ vorausgesetzt, daher muss $\sphericalangle QBA = 15°$. Der Winkel $\sphericalangle AQB$ muss als Nebenwinkel von $\sphericalangle BQP$ $150°$ groß sein. Damit ist auch $\sphericalangle BAP = 15°$, wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck BAP. Auch BAP ist folglich ein gleichschenkliges Dreieck.

Nun soll das Dreieck PQC genauer betrachtet werden: Da PC doppelt so lang wie PB und mithin doppelt so lang wie PQ ist, und der Winkel $\sphericalangle CPQ$ $60°$ groß ist, ist $\sphericalangle PQC$ ein rechter Winkel. Davon überzeugt man sich am besten, indem man noch einen Punkt P' auf der Gerade durch A und P hinzunimmt. Dann ist $P'PC$ ein gleichseitiges Dreieck, weil $PC = PP'$ und $\sphericalangle CPQ = 60°$ und Q ist als Mittelpunkt von $P'P$ gleichzeitig Lotfußpunkt vom Lot von C auf $P'P$. Weil $\sphericalangle CPQ = 60°$ und $\sphericalangle PQC = 90°$ ergibt sich wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck PQC dass $\sphericalangle QCP = 30°$. Damit ist dieser Winkel genauso groß wie $\sphericalangle PBQ$ und auch BQP ist gleichschenklig.

Der Punkt Q gehört also zu zwei gleichschenkligen Dreiecken, die sich die Seite QB teilen. Es ergibt sich, dass die Strecken QA, QB und QC gleich lang sind. Also ist Q Umkreismittelpunkt von ABC. Das Dreieck CQA ist deshalb ebenfalls gleichschenklig und außerdem, wie oben gezeigt, rechtwinklig. Der Winkel $\sphericalangle ACQ$ ist damit $45°$ groß. Die gesuchte Größe von $\sphericalangle ACB$ ist $\sphericalangle ACQ + \sphericalangle QCP = 45° + 30° = 75°$.

Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann

Lösung 031246:



Untersuchung der einzelnen Behauptungen:

a) Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig.

Diese Aussage ist **richtig**.

Gegeben sei ein Kreis und eine Seitenlänge, so dass sich ein Vieleck mit dieser Seitenlänge in den Kreis einbeschreiben lässt. Betrachte einen Punkt A des Vielecks. Es gibt nur zwei Punkte auf dem Kreis, die von A den gleichen Abstand besitzen (Anzahl Schnittpunkte bei Schnitt von zwei Kreisen). Das müssen die Nachbarpunkte des Vielecks zum Eckpunkt A sein. Der Winkel zwischen den benachbarten Kanten ist daher immer gleichgroß.

b) Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig.

Diese Aussage ist **falsch**.

Beispiel: Das Rechteck mit den Seitenlängen 3 und 4 kann einem Kreis mit Durchmesser 5 einbeschrieben werden. Es hat 4 Winkel der Größe $90°$ aber unterschiedlich lange Seiten.

c) Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig.

Diese Aussage ist **falsch**.

Beispiel: Man nehme zwei verschiedene Durchmesser des Kreises, die um den Winkel α gegeneinander verdreht sind. An den vier Schnittpunkten der Durchmesser mit dem Kreis lege man Tangenten an den Kreis. Diese Tangenten erzeugen einen Rhombus, also ein gleichseitiges Parallelogramm, mit den Winkeln α und $180° - \alpha$.

d) Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig.

Diese Aussage ist **richtig**.

Den Winkel zwischen zwei benachbarten Kanten des Vielecks nenne α. Die Kanten sind Tangenten an den Kreis, daher liegen Kanten und Kreisradien im rechten Winkel zueinander. Der Winkel zwischen zwei solchen benachbarten Radien ist $180° - \alpha$ groß. Die Vieleckskanten bilden mit den Kreisradien aneinandergereihte Drachenvierecke mit gleichen Winkeln. Da ein Kreisradius Kante zweier benachbarter Drachenvierecke ist, sind die Drachenvierecke nicht nur ähnlich sondern auch kongruent. Damit sind die Vieleckskanten alle gleich lang.

Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann