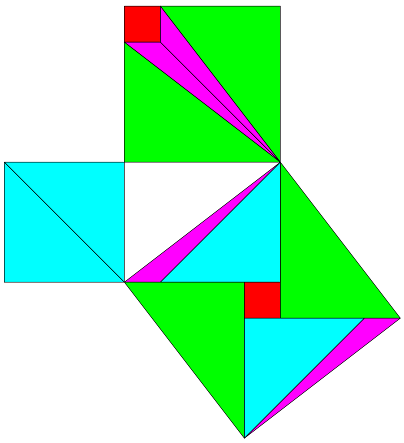
# 3. Mathematik Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 12
# Saison 1963/1964

Aufgaben und Lösungen



# 3. Mathematik-Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 12
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

## Aufgabe 031211:

Von den Punkten $A$ und $B$ einer Strecke $\overline{AB}$, deren Länge nicht direkt gemessen werden kann, werden zwei weitere Punkte $C$ und $D$, deren gegenseitiger Abstand bekannt ist, angepeilt. Man mißt folgende Winkel:

$$\sphericalangle \mathrm{DAB} = 80°, \quad \sphericalangle \mathrm{CAB} = 30°, \quad \sphericalangle \mathrm{ABC} = 60°, \quad \sphericalangle \mathrm{ABD} = 20°.$$

Die Länge der Strecke $\overline{CD}$ beträgt 2 km. Wie kann man die Länge der Strecke $\overline{AB}$ ermitteln?

a) Lösen Sie die Aufgabe durch Konstruktion! Fertigen Sie eine Konstruktionsbeschreibung und eine Begründung an!

b) Lösen Sie die Aufgabe auf rechnerischem Wege! (Es genügt hierbei die Angabe der Formeln, eine zahlenmäßige Berechnung wird nicht verlangt.)

## Aufgabe 031212:

Beim Eichen eines Dynamometers wurden die Größen der Belastung $P$ gemessen, die erforderlich waren, um den Zeiger bis zu bestimmten Teilstrichen der Skala ausschlagen zu lassen. Man erhielt die folgenden Werte:

| Zahl der Teilstriche $N$ | Belastung in kp $P$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 5 | 4,87 |
| 10 | 10,52 |
| 15 | 17,24 |
| 20 | 25,34 |

Die Belastung $P$ kann durch die folgende ganze rationale Funktion von $N$ dargestellt werden:

$$P(N) = a_1N + a_2N^2 + a_3N^3 + a_4N^4.$$

a) Es sind die Koeffizienten $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ zu berechnen!

b) Welchen Wert hat die Funktion für $N = 25$? Vergleichen Sie mit dem durch Messung gefundenen Wert $P = 35{,}16$!

## Aufgabe 031213:

Man bestimme alle reellen Werte von $x_1$, $x_2$, $x_3$, die den Gleichungen

$$x_2 + x_3 = px_1,$$
$$x_1 + x_3 = px_2,$$
$$x_1 + x_2 = px_3$$

genügen, und ihre Abhängigkeit von der reellen Zahl $p$ (Parameter)!

Aufgabe 031214:
Man beweise:

Bezeichnen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel eines Dreiecks, so gelten

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1 \qquad \text{und}$$
$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha.$$

Aufgabe 031215:
Gegeben seien ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M$ und ein Punkt $P$ im Innern des Kreises.

Welches ist der geometrische Ort für die Mitten der durch $P$ verlaufenden Sehnen?

Aufgabe 031216:
Es ist

$$\frac{26}{65} = \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}.$$

Man darf also bei diesem Bruch die Ziffern 6 „kürzen“. Für welche Brüche mit zweistelligen Zählern und Nennern ist ein solches „Kürzen“ irgendeiner Ziffer des Zählers gegen eine Ziffer des Nenners gestattet, ohne daß sich die dargestellte rationale Zahl ändert?

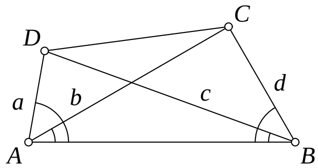
OJM

# 3. Mathematik-Olympiade
## 1. Stufe (Schulolympiade)
## Klasse 12
## Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 031211:

*Konstruktion*




1. Zeichne beliebige Strecke $AB$
2. Trage zur gleichen Seite von $AB$ folgende Winkel ab: Am Punkt $A$ die Winkel der Größen $80°$ und $30°$ und am Punkt $B$ die Winkel der Größen $20°$ und $60°$. Bezeichne die entstehenden Schenkel der Reihe nach mit $a$, $b$, $c$, $d$.
3. Den Schnittpunkt von $a$ und $c$ nenne $D$ und den von $b$ und $d$ nenne $C$.
4. Die gesuchte Länge ist $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \cdot 2$ km. Diese Größe kann man auch mit Lineal und Dreieck unter Verwendung des Strahlensatzes konstruieren.

*Berechnung*

Sinussatz im Dreieck $ABD$:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{\sin 80°}{\sin 80°} = 1$$

Sinussatz im Dreieck $ABC$:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{\sin 30°}{\sin 90°} = \frac{1}{2}$$

Kosinussatz im Dreieck $BCD$ bezüglich $\sphericalangle CBD$.

$$\begin{aligned}
\overline{DC}^2 &= \overline{DB}^2 + \overline{CB}^2 - 2 \cdot \overline{DB} \cdot \overline{CB} \cdot \cos \sphericalangle \text{CBD} \\
&= \overline{AB}^2 + \frac{1}{4}\overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \cos 40° = \overline{AB}^2 \cdot \left(\frac{5}{4} - \cos 40°\right) \\
\overline{DC} &= \overline{AB} \cdot \sqrt{\frac{5}{4} - \cos 40°} \\
\overline{AB} &= \frac{\overline{DC}}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos 40°}} = \frac{4\text{ km}}{\sqrt{5 - 4\cos 40°}}
\end{aligned}$$

*Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann*

Lösung 031212:

a) Man kann beobachten, dass sich der angesetzte polynomielle Zusammenhang zwischen der Anzahl der Teilstriche $N$ und der Belastung $P(N)$ vereinfacht, wenn man zu Differenzen zwischen aufeinanderfolgenden Werten in der Wertetabelle übergeht. Genaugenommen reduziert sich der Polynomgrad und damit die Anzahl der unbestimmten Parameter um eins.

Die Differenzen zwischen diesen Differenzen verringern den Polynomgrad erneut um eins. Diese Differenzenbildung kann man so lange fortsetzen, bis nur noch ein Koeffizient bleibt.

Zum einfacheren Rechnen werden die Werte so normiert, dass man nur Dezimalbrüchen ohne Perioden erhält.

$$\begin{aligned}
f_0(x) &:= \frac{3}{5x} \cdot P(5x) \\
&= 3 \cdot (a_1 + 5a_2 x + 25a_3 x^2 + 125a_4 x^3) \\
&=: b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \\
f_1(x) &:= f_0(x+1) - f_0(x) \\
&= b_1 + b_2(2x+1) + b_3(3x^2 + 3x + 1) \\
&= b_1 + b_2 + b_3 + (2b_2 + 3b_3)x + 3b_3 x^2 \\
&=: c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \\
f_2(x) &:= f_1(x+1) - f_1(x) \\
&= c_1 + c_2(2x+1) \\
&= c_1 + c_2 + 2c_2 x \\
&=: d_0 + d_1 x \\
f_3(x) &:= f_2(x+1) - f_2(x) \\
&=: d_1
\end{aligned}$$

| $x$ | $f_0(x)$ | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.922 | 0.234 | 0.058 | 0.003 |
| 2 | 3.156 | 0.292 | 0.061 | |
| 3 | 3.448 | 0.353 | | |
| 4 | 3.801 | | | |

Daraus erhält man Schritt für Schritt die Koeffizienten aller Polynome zurück:

$$\begin{array}{lcllcl}
d_1 & = & f_3(1) & & & = 0.003 \\
d_0 & = & f_2(1) - 1 \cdot d_1 & & & = 0.055 \\
c_2 & = & d_1/2 & & & = 0.0015 \\
c_1 & = & d_0 - c_2 & & & = 0.0535 \\
c_0 & = & f_1(1) - 1 \cdot c_1 - 1^2 \cdot c_2 & = & f_1(1) - d_0 & = 0.179 \\
b_3 & = & c_2/3 & & & = 0.0005 \\
b_2 & = & (c_1 - 3b_3)/2 & = & (c_1 - c_2)/2 & = 0.026 \\
b_1 & = & c_0 - b_2 - b_3 & & & = 0.1525 \\
b_0 & = & f_0(1) - 1 \cdot b_1 - 1^2 \cdot b_2 - 1^3 \cdot b_3 & = & f_1(1) - c_0 & = 2.743 \\
3a_4 & = & b_3/125 & & & \\
3a_3 & = & b_2/25 & & & \\
3a_2 & = & b_1/5 & & & \\
3a_1 & = & b_0 & & &
\end{array}$$

| $i$ | $a_i$ | $3a_i$ | $b_i$ | $c_i$ | $d_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | 2.7430 | 0.1790 | 0.055 |
| 1 | 0.914333333 | 2.743 | 0.1525 | 0.0535 | 0.003 |
| 2 | 0.010166667 | 0.0305 | 0.0260 | 0.0015 | |
| 3 | 0.000346667 | 0.00104 | 0.0005 | | |
| 4 | 0.000001333 | 0.000004 | | | |

b)
$$\begin{aligned} P(25) &= \frac{25}{3} \cdot f_0(5) \\ &= \frac{25}{3} \cdot (((0.0005 \cdot 5 + 0.026) \cdot 5 + 0.1525) \cdot 5 + 2.743) \\ &= \frac{25}{3} \cdot ((0.0285 \cdot 5 + 0.1525) \cdot 5 + 2.743) \\ &= \frac{25}{3} \cdot (0.295 \cdot 5 + 2.743) \\ &= \frac{25}{3} \cdot 4.218 \\ &= 25 \cdot 1.406 \\ &= 35.15 \end{aligned}$$

*Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann*

Lösung 031213:
Angenommen es gibt eine Lösung $(x_1, x_2, x_3)$, die den Gleichungen

$$x_2 + x_3 = px_1, \quad (1)$$
$$x_1 + x_3 = px_2, \quad (2)$$
$$x_1 + x_2 = px_3 \quad (3)$$

genügt, so genügt diese Lösung auch den äquivalenten Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= (p+1)x_1, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= (p+1)x_2, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= (p+1)x_3. \end{aligned}$$

Ist $p \neq -1$, so ist $(x_1 + x_2 + x_3)(p+1)^{-1} = x_1 = x_2 = x_3 = x$. Aus (1) bis (3) folgt nun $2x = px$, also ist $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ die einzige Lösung für $p \notin \{-1, 2\}$. Für $p = 2$ genügen alle $(x_1, x_2, x_3) = (x, x, x)$, $x$ reell, den Gleichungen.

Ist $p = -1$, so sind die Gleichungen (1) bis (3) äquivalent zu $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Somit genügen alle $(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_1 - x_2)$, $x_1, x_2$ reell, den Gleichungen.

*Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber*

Lösung 031214:
Herleitung der ersten Gleichung mit Hilfe des Additionstheorems

$$\begin{aligned} \cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \\ 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma &= 2(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))\cos\gamma \\ &= \cos(\alpha-\beta-\gamma) + \cos(\alpha-\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\alpha+\beta+\gamma) \\ &= \cos(-\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\alpha-\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\alpha+\beta+\gamma) \end{aligned}$$

Die Innenwinkelsumme beträgt $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= \cos(\pi - 2\alpha) + \cos(\pi - 2\beta) + \cos(\pi - 2\gamma) + \cos\pi \\ &= -\cos(2\alpha) - \cos(2\beta) - \cos(2\gamma) - 1 \end{aligned}$$

Es gilt das Additionstheorem $\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ und analoges für $\beta$ und $\gamma$.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 3\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

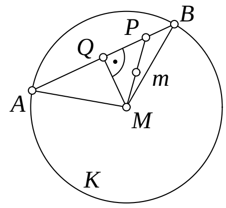
Die zweite Gleichung lässt sich aus dem Kosinussatz $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\gamma$ ableiten, wobei die Seiten $a$, $b$ und $c$ den Winkeln $\alpha$, $\beta$ bzw. $\gamma$ gegenüberliegen.

Wegen $\alpha \neq 0$, gibt es ein $x \neq 0$ mit $a = x\cdot\sin\alpha$ und nach dem Sinussatz gilt dann $b = x\cdot\sin\beta$ und $c = x\cdot\sin\gamma$, womit aus dem Kosinussatz folgt:

$$x^2\sin^2\alpha = x^2\sin^2\beta + x^2\sin^2\gamma - x^2\sin\beta\sin\gamma\cos\gamma \text{ und wegen } x \neq 0$$
$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cos\gamma$$

*Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann*

Lösung 031215:




*Behauptung:*

Der Ort aller gesuchten Punkte ist der Kreis $k$ mit dem Durchmesser $MP$.

*Beweis:*

*1. Teilbehauptung:*

Jeder Sehnenmittelpunkt liegt auf $k$.

Es seien $A$ und $B$ die Schnittpunkte des Kreises (ab jetzt $K$ genannt) mit einer Sehne durch den Punkt $P$. Die Strecken $MA$ und $MB$ sind Radien des Kreises und daher gleich lang und das Dreieck $AMB$ ist gleichschenklig.

Der Lotfußpunkt $Q$ des Lotes von $M$ auf $AB$ ist gleichzeitig Mittelpunkt der Sehne $AB$.

Das Dreieck $MQP$ ist rechtwinklig, folglich ist der Mittelpunkt $m$ seines Umkreises gleichzeitig Mittelpunkt von der Hypothenuse $MP$. Das bedeutet, dass der Umkreis vom Dreieck $MQP$ der Kreis $k$ ist.

*2. Teilbehauptung:*

Alle Punkte von $k$ sind Sehnenmittelpunkte

Man wähle einen Punkt $Q$ auf dem Kreis $k$, der nach dem Satz des Thales das rechtwinklige Dreieck $MQP$ aufspannt. Die Dreiecksungleichung bezogen auf das Dreieck $MmQ$ stellt sicher, dass $Q$ von $M$ weniger weit entfernt ist als $P$ von $M$ und damit genau wie $P$ innerhalb des Kreises liegt. Daher kann man die Strecke $QP$ auf beiden Seiten bis zum Kreis $K$ verlängern und erhält dort die Schnittpunkte $A$ und $B$.

Das Dreieck $AMB$ ist gleichschenklig und $Q$ ist als Lotfußpunkt von $M$ gleichzeitig Mittelpunkt von $AB$. $\square$

*Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann*

Lösung 031216:

*Fallunterscheidung*

1)
$$\begin{aligned}\frac{10a+c}{10b+c} &= \frac{a}{b}\\ b(10a+c) &= a(10b+c)\\ bc &= ac\end{aligned}$$

Das bedeutet $c = 0$ oder $a = b$. Erstes bedeutet, dass sich bei allen Brüchen mit Vielfachen von 10 in Zähler und Nenner bezüglich der Null „kürzen“ lassen, und zweites bedeutet, dass Nenner und Zähler gleich sind.

2)
$$\begin{aligned}\frac{10c+a}{10c+b} &= \frac{a}{b}\\ b(10c+a) &= a(10c+b)\\ 10bc &= 10ac\\ bc &= ac\end{aligned}$$

$c$ kann nicht Null sein, denn dann wären die dargestellten Zahlen nicht zweistellig. Also ist $a = b$, das führt zu identischem Zähler und Nenner.

3)
$$\begin{aligned}\frac{10a+c}{10c+b} &= \frac{a}{b}\\ b(10a+c) &= a(10c+b)\\ 9ab+bc &= 10ac\\ bc &= a(10c-9b)\\ a &= \frac{bc}{10c-9b}\end{aligned}$$

Die möglichen Belegungen für $a$, $b$ und $c$ sollen nun durch Ausprobieren herausgefunden werden. Dabei gibt es folgende Vereinfachungen:

a) Der Fall, dass alle Variablen gleich sind, wurde bereits behandelt.

b) Ist $a = x, b = y, c = z$ eine Lösung, so ist für alle natürlichen Zahlen $k$ auch $a = kx, b = ky, c = kz$ eine Lösung, sofern jeder Wert kleiner als 10 ist.

c) Für festes $c$ kann man den zulässigen Wertebereich weiter einschränken:

$$\begin{aligned}1 &\le a\\ &= \frac{bc}{10c-9b}\\ 10c-9b &\le bc\\ 10c &\le b(c+9)\\ \frac{10c}{c+9} &\le b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}9 &\ge a\\ &= \frac{bc}{10c-9b}\\ 90c-81b &\ge bc\\ 90c &\ge b(c+81)\\ &\ge 81b\\ \frac{10}{9}c &\ge b\end{aligned}$$

| $c$ | $b$ | $\frac{bc}{10c-9b}$ | Lösung? |
|---|---|---|---|
| 5 | 4 | $20/14$ | |
| 6 | 4 | $24/24 = 1$ | ja |
| 6 | 5 | $30/15 = 2$ | ja |
| 7 | 5 | $35/25$ | |
| 7 | 6 | $42/16$ | |
| 8 | 5 | $40/35$ | |
| 8 | 6 | $48/26$ | |
| 8 | 7 | $56/17$ | |
| 9 | 5 | $45/45 = 1$ | ja |
| 9 | 6 | $54/36$ | |
| 9 | 7 | $63/27$ | |
| 9 | 8 | $72/18 = 4$ | ja |

4)
$$\frac{10c + b}{10a + c} = \frac{b}{a}$$

Dieser Fall führt zum gleichen Zusammenhang wie der vorige Fall nur mit vertauschtem Zähler und Nenner.

Die gesuchten Brüche sind
$$\frac{16}{64}, \frac{26}{65}, \frac{19}{95}, \frac{49}{98}, \frac{64}{16}, \frac{65}{26}, \frac{95}{19}, \frac{98}{49}$$
und darüber hinaus alle Brüche mit gleichem Zähler und Nenner, sowie sämtliche Brüche mit Vielfachen von 10 in Zähler und Nenner.

*Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann*