3. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 11
Saison 1963/1964

Aufgaben und Lösungen

3. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 031121:
Es ist zu beweisen, daß $n^3 + 3n^2 - n - 3$ bei ungeradem n stets durch 48 teilbar ist!

Aufgabe 031122:
Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen x, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$1 - \sin 5x = \left(\cos\frac{3}{2}x - \sin\frac{3}{2}x\right)^2 .$$

Aufgabe 031123:
In der Ebene seien n Punkte ($n > 3$) gegeben, von denen keine drei in einer Geraden liegen.

Gibt es einen Kreis, der durch mindestens drei dieser Punkte hindurchgeht und keinen der übrigen Punkte im Innern enthält?

Aufgabe 031124:
In ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a sollen drei gleichgroße Kreise so eingezeichnet werden, daß jeder die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt.

a) Bestimmen Sie den Radius der Kreise!

b) Geben Sie eine Konstruktion für den Radius an!

Aufgabe 031125:
Bei der Aufgabe

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{A} & \mathrm{T} & \mathrm{O} & \mathrm{M} & \cdot & \mathrm{A} & \mathrm{T} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\
\hline
 & * & * & * & * & * & & & \\
 & & * & * & * & * & * & & \\
 & & & * & * & * & * & * & \\
 & & & & * & * & * & * & * \\
\hline
 & * & * & * & * & \mathrm{A} & \mathrm{T} & \mathrm{O} & \mathrm{M}
\end{array}$$

bedeutet jeder Buchstabe und jedes Zeichen $*$ eine der Ziffern von 0 bis 9 (A $\neq$ 0). Verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern.

Wie lautet die Aufgabe?

3. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 11
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 031121:

Für jedes ungerade n gibt es eine natürliche Zahl (Null eingeschlossen) k mit $n = 2k + 1$.

$$\begin{aligned} n^3 + 3n^2 - n - 3 &= (n^2 - 1)(n + 3) \\ &= (n - 1)(n + 1)(n + 3) \\ &= 2k(2k + 2)(2k + 4) \\ &= 8 \cdot k(k + 1)(k + 2) \end{aligned}$$

Von den zwei aufeinanderfolgenden Zahlen k und $k + 1$ ist immer eine gerade und von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen k, $k + 1$ und $k + 2$ ist immer eine durch drei teilbar. Da 2 und 3 teilerfremd sind, ist $k(k + 1)(k + 2)$ durch 6 teilbar und damit der ganze Ausdruck durch 48.

Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann

Lösung 031122:

Wende das Additionstheorem
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
auf $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}x$ und $\beta = \frac{3}{2}x$ an und erhalte:

$$\begin{aligned} \cos\frac{3}{2}x - \sin\frac{3}{2}x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}x\right) - \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \\ &= 2\cos\frac{\pi+6x}{4}\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi+6x}{4} \\ \left(\cos\frac{3}{2}x - \sin\frac{3}{2}x\right)^2 &= 2\cos^2\frac{\pi+6x}{4} = 1 + \cos\frac{\pi+6x}{2} \\ &= 1 - \sin 3x \end{aligned}$$

Damit wird die ursprüngliche Gleichung zu

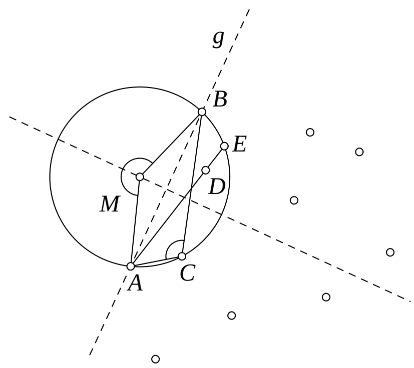
$$\begin{aligned} 1 - \sin 5x &= 1 - \sin 3x \\ \sin 5x &= \sin 3x \end{aligned}$$

Die linke Seite wird genau dann null, wenn x ein Vielfaches von $\frac{\pi}{5}$ ist und die rechte Seite, genau dann wenn x ein Vielfaches von $\frac{\pi}{3}$ ist. Das kleinste gemeinsame Vielfache von $\frac{\pi}{5}$ und $\frac{\pi}{3}$ ist π, folglich ist die Gleichung genau dann erfüllt, wenn x Vielfaches von π ist.

Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann

Lösung 031123:

In der Punktmenge gibt es immer zwei Punkte A und B, durch die eine Gerade g verläuft, so dass alle Punkte der Menge auf derselben Seite von g liegen. Das trifft zum Beispiel für zwei benachbarte Punkte auf der konvexen Hülle zu. Diejenige Seite von g, auf der sich kein Punkt befindet betrachte als außen. Alle Kreise, die durch A und B verlaufen, haben ihren Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten zu der Strecke AB.



Da keine 3 Punkte der Punktmenge auf einer Geraden liegen, existiert zu jeder dreielementigen Untermenge genau ein Kreis, der durch alle Punkte der Untermenge verläuft.

Von allen Punkten außer A und B nenne denjenigen Punkt C, der den größtmöglichen Winkel $\sphericalangle BCA$ aufweist.

Behauptung: Der Kreis durch A, B und C enthält keinen weiteren Punkt der Punktmenge.

Beweis: Angenommen, es gäbe noch einen Punkt D in dem Kreis.

Da sich alle Punkte der Menge auf der gleichen Seite der Geraden g befinden, muss sich D im Kreisabschnitt zwischen der Sehne AB und dem Bogen durch C befinden. Deswegen kann man die Strecke AD über D hinaus verlängern bis sie diesen Bogen im Punkt E schneidet.

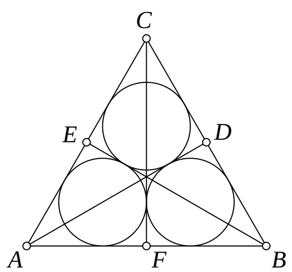
Der Winkel $\sphericalangle BEA$ ist so groß wie $\sphericalangle BCA$ weil beide Peripheriewinkel über der gleichen Sehne auf derselben Seite sind.

Die Dreiecke ABE und ABD haben den Winkel $\sphericalangle BAD$ gemeinsam, aber $\sphericalangle ABD$ ist kleiner als $\sphericalangle ABE$ und wegen der konstanten Innenwinkelsumme in Dreiecken ist $\sphericalangle BDA$ größer als $\sphericalangle BCA$.

Das ist aber ein Widerspruch, denn $\sphericalangle BCA$ sollte der größtmögliche Winkel sein. $\square$

Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann

Lösung 031124:



Bezeichne das Dreieck mit ABC und die Lotfußpunkte der Lote von A, B, C auf die jeweils gegenüberliegende Seite mit D, E, F.

Der Inkreis vom Dreieck ACF berührt den Inkreis von BCF weil CF Symmetrieachse von ABC ist.

AD ist ebenfalls Symmetrieachse, deswegen ist der Inkreis von ACF gleichzeitig Inkreis von AEB und der Inkreis von BCE berührt den Inkreis von AEB. Analog folgt, dass sich die Inkreise von BCE und BCF berühren.

Die betrachteten Inkreise sind folglich die in der Aufgabenstellung gesuchten.

a) $|AB| = a$ (Aufgabenstellung)
   $|CF| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (Höhe im gleichseitigen Dreieck)
   $|AF| = \frac{a}{2}$

b) Die naheliegendste Konstruktion ist wohl, einen Inkreis zum Beispiel den von ACF zu konstruieren und dessen Radius zu bestimmen.

   1. Bestimme den Inkreismittelpunkt als Schnittpunkt zweier Winkelhalbierender
   2. Bestimme den Radius des Kreises als Lot des Mittelpunktes auf eine Dreiecksseite.

Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann

Lösung 031125:

Die Aufgabe lässt sich formulieren als die Suche nach zwei natürlichen Zahlen n und k mit $n \cdot n = 10\,000k + n$ oder auch $n \cdot (n-1) = 10\,000k$. Das wiederum entspricht der Suche nach einem ganzen n mit $10\,000 \mid n(n-1)$.

Es gilt $10/s000 = 10^4 = 2^4 \cdot 5^4 = 16 \cdot 625$.

Von den zwei aufeinanderfolgenden Zahlen $n-1$ und n kann nur eine durch 2 teilbar sein, folglich muss entweder $2^4|(n-1)$ oder $2^4|n$ gelten. Analog kann von $n-1$ und n nur eine Zahl durch 5 teilbar sein, mithin entweder $5^4|(n-1)$ oder $5^4|n$.

Fallunterscheidung:

1. $625|n$ und $16|n$
   das bedeutet $10\,000|n$ und $n \geq 10\,000$, damit ist n aber nicht mehr vierstellig

2. $625|(n-1)$ und $16|(n-1)$
   das bedeutet $10\,000|(n-1)$, daraus folgt $n = 1$ oder $n \geq 10\,001$ und n ist wiederum nicht vierstellig

3. $625|n$ und $16|(n-1)$
   Die durch 625 teilbaren Zahlen lassen sich als $625m$ mit $m \in \mathbb{N}$ darstellen.
   $$\begin{aligned} n-1 &\equiv 625m - 1 && \mod 16 \\ &\equiv m-1 && \mod 16 \end{aligned}$$
   Mit anderen Worten: Falls n durch 625 teilbar ist, ist $n-1$ genau dann durch 16 teilbar, falls m beim Teilen durch 16 den Rest 1 lässt, also $m \in \{1, 17, 33, \dots\}$. Für $m = 1$ ist $n = 625$ zu klein ($A = 0$) und für $m \geq 17$ ist $n \geq 17 \cdot 625 = 16 \cdot 625 + 625 = 10\,625$ zu groß.

4. $625|(n-1)$ und $16|n$
   Setze $n = 625m + 1$
   $$\begin{aligned} n &\equiv 625m + 1 && \mod 16 \\ &\equiv m+1 && \mod 16 \\ &\equiv m-15 && \mod 16 \end{aligned}$$
   Daraus folgt $m \in \{15, 31, \dots\}$, wobei sich für $m = 15$ ergibt, dass $n = 15 \cdot 625 + 1 = 16 \cdot 625 - 625 + 1 = 10\,000 - 624 = 9\,376$ und für $m \geq 31$, dass $n \geq 19\,376$, was nicht vierstellig ist.

Lösung: ATOM $= 9\,376$

Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann